4 Elektromagnetické vlny v hmotném prostředí

V předchozí části jsme popsali šíření elektromagnetické vlny vakuem. Taková vlna není ničím ovlivňovaná. Není zpomalovaná ani tlumená a šíří ve všech směrech stejnou rychlostí c. Jakmile se dostane do hmotného prostředí, její šíření se změní.

4.1 Index lomu

Prochází-li elektromagnetická vlna hmotným prostředím, atomy a molekuly prostředí brání vlně v hladkém průchodu. Míru, jakou se fázová rychlost vlny zmenší oproti c, určuje veličina, kterou nazýváme **index lomu**. Index lomu n je pro dané prostředí definován

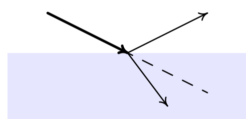
$$n = \frac{c}{v_f}, \tag{23}$$

kde c je rychlost vlny ve vakuu a v_f je velikost fázové rychlosti v prostředí. Čím větší je index lomu, tím menší je rychlost vlny v prostředí. Prostředí s velkým indexem lomu více brání průchodu vln. Říkáme, že je opticky[2] husté. Index lomu je bezrozměrná veličina (je to poměr dvou rychlostí).

Vzduch za normálních podmínek (při daném tlaku, teplotě a vlhkosti) má index lomu velmi blízký jedničce $n = 1{,}000\,272$. Elektromagnetické vlny procházející vzduchem jsou téměř stejně rychlé jako ve vakuu. Rychlost elektromagnetických vln ve vodě je $225\,000\,000\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ $(n = 1,33)$ a ve skle $200\,000\,000\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ $(n = 1,53)$.

Poznámka: Dále si ukážeme, že v plazmatu může být index lomu menší než jedna, fázová rychlost vln je pak překvapivě větší než c (stále ve shodě s předpoklady teorie relativity).

Dopadá-li paprsek světla šikmo na vodní hladinu, rozdělí se na dva slabší paprsky, obr. 18. Jeden se od hladiny odrazí pod stejným úhlem pod jakým původní paprsek na hladinu dopadl. Druhý se na hladině zlomí a prochází do vody. Čím větší je index lomu prostředí, do kterého se paprsek láme, tím více se paprsek odklání od svého původního směru (na obrázku čárkovaně). Z tohoto důvodu se veličina n nazývá index lomu.



obr. 18: Odraz a lom

4.2 Vlnová délka a frekvence vlny

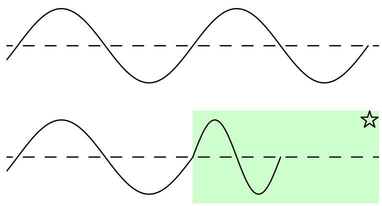
Vstoupí-li elektromagnetická vlna do libovolného hmotného prostředí, její frekvence se nezmění. Spolu s frekvencí se zachová perioda T, která je s frekvencí f spojena

[2] Přestože zabraňuje průchodu všem elektromagnetickým vlnám (nejen optickým, ale i radiových i rentgenových), používá se termín opticky husté.

rovnicí (1) $T = \frac{1}{f}$. Úhlová frekvence ω, daná vztahem (7) $\omega = 2\pi f$, zůstává také beze změn.

S poklesem fázové rychlosti vlny při vstupu do hmotného prostředí se zmenšuje vlnová délka. Vytváří-li se jednotlivé vlnky ve stejném tempu a vlna se nedostane tak daleko, vlnky musí být kratší.

Tyto úvahy zapíšeme rovnicemi. Na obrázku 19 vidíme, jak elektromagnetická vlna s frekvencí f přechází z vakua, do „hvězdičkového" prostředí. Ve vakuu dle rovnice (22) platí $f = \frac{c}{\lambda}$, v prostředí pak $f = \frac{v_f^\star}{\lambda^\star}$. Jelikož se frekvence zachovává, vztahy můžeme dát do rovnosti a získáme rovnici pro vlnovou délku v hmotném prostředí



obr. 19: Změna λ v prostředí

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{v_f^\star}{\lambda^\star} \quad \Rightarrow \quad \lambda^\star = \lambda \frac{v_f^\star}{c}. \tag{24}$$

Kolikrát pomaleji se vlna prostředím šíří, tolikrát má oproti vakuu kratší vlnovou délku. Pomocí definice indexu lomu $n^\star = \frac{c}{v_f^\star}$ získáme přehlednější tvar

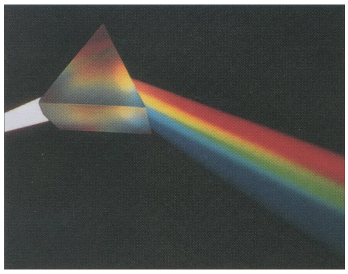
$$\lambda^\star = \lambda \frac{\frac{c}{n^\star}}{c} \quad \Rightarrow \quad \lambda^\star = \lambda \frac{1}{n^\star} \quad \Rightarrow \quad \lambda^\star = \frac{\lambda}{n^\star}, \tag{25}$$

kde „ohvězdičkované" proměnné přísluší hmotnému prostředí a λ značí vlnovou délku vlny ve vakuu. Hmotné prostředí na obrázku 19 má index lomu roven 2, velikost fázové rychlosti klesla na polovinu, na polovinu se také zkrátila vlnová délka.

Zabýváme-li se vlnami v hmotných prostředích, bývá zvykem namísto vlnové délky λ vlnu charakterizovat její frekvencí f nebo úhlovou frekvencí ω, $\omega = 2\pi f$, které jsou pro konkrétní vlnu ve všech prostředích stále stejné.

4.3 Disperze

Rychlost elektromagnetické vlny procházející prostředím často záleží nejen na daném prostředí, ale také na vlně samotné – konkrétně na její frekvenci. Nejkrásnějším důkazem tohoto tvrzení je duha. Světlo ze Slunce je složeno z elektromagnetických vln o různých frekvencích, kterým odpovídají jednotlivé barvy. Šíří-li se všechny dohromady, vnímáme je jako bílé světlo. Dopadne-li světlo na vodní kapku, každá frekvence se na povrchu kapky trochu jinak odrazí a zlomí. Výsledkem je rozložení bílého světla na jeho jednotlivé barevné složky. Na jednom kraji duhy je červená barva s nejmenší frekvencí. Červená přechází v oranžovou, dále ve žlutou, zelenou, modrou a na druhém kraji duhy je s největší frekvencí fialová barva. (Takové pořadí barev odpovídá jejich vzestupnému řazení podle frekvence, sestupnému podle vlnové délky.)



obr. 20: Normální disperze

Závislost indexu lomu na frekvenci vlny nazýváme **disperzí**. Ve většině případů platí, že s rostoucí frekvencí roste index lomu prostředí a tedy klesá fázová rychlost vlny, tzv. **normální disperze**. Při normální disperzi hmotné prostředí více ovlivňuje vlny o vyšších frekvencích. Na obrázku 20 vidíme[3], že po průchodu světla skleněným hranolem se od původního směru nejvíce odchýlil paprsek modré barvy, naopak cesta červeného se od původní změnila nejméně. Modrá barva s vyšší frekvencí byla sklem více ovlivněna než červená.

Poznámka: V plazmatu se setkáme také s **anomální disperzí**, kdy vlny o vyšších frekvencích procházejí prostředím snadněji (rychleji) než vlny s nižšími frekvencemi.

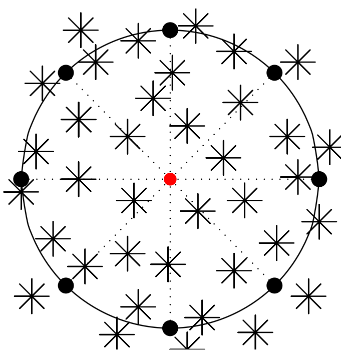
Dosadíme-li do rovnice (23) $n = \frac{c}{v_f}$ za fázovou rychlost v_f vztah (13) $v_f = \frac{\omega}{k}$, dostaneme závislost indexu lomu n na úhlové frekvenci ω, kterou nazýváme **disperzní relace**

$$n = \frac{c}{\frac{\omega}{k}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{ck}{\omega}, \tag{26}$$

kde k je vlnové číslo. Disperzní relací je také například závislost úhlové frekvence na vlnovém čísle $\omega = \frac{ck}{n}$ (nebo jiný tvar rovnice (26)).

4.4 Izotropní a anizotropní prostředí

Představte si, že stojíte na pařezu v lese s píšťalkou v ruce. Osm vašich kamarádů z atletického kroužku stojí kolem vás. Písknete a všichni kamarádi se rozutečou po zalesněné rovině každý na jinou stranu. Situaci vidíme shora na obrázku 21, kamarádi jsou černé tečky, vy jste červená a hvězdičky představují jehličnany.



obr. 21: Kamarádi v lese

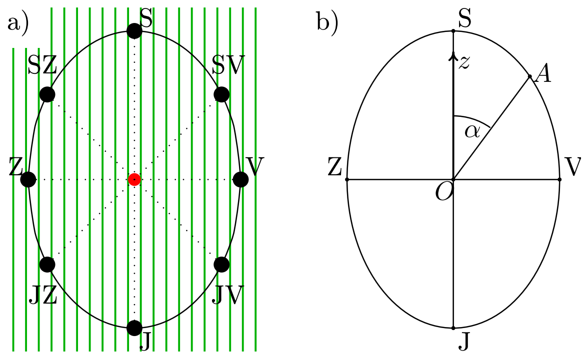
Po deseti sekundách písknete podruhé a všichni se zastaví. Les je všude stejně hustý, stromy jsou v lese rozmístěny náhodně, a tak každý z osmi kamarádů se musel cestou vyhnout přibližně stejnému počtu stromů – všichni byli prostředím stejně bržděni. Jestliže všichni kamarádi běhají stejně rychle, pak vytvoří kružnici, v jejímž středu jste vy a pařez.

Les je dvourozměrné prostředí izotropní vůči běhání, ať běžíte jakýmkoli směrem, za daný čas uběhnete pokaždé stejnou vzdálenost. (Dvourozměrné proto, že běháte pouze po zemi – v jedné rovině.)

[3] Obr. 20 je převzatý z [1]

Anizotropním příkladem k izotropnímu lesu je trochu odrostlá smrková školka, kde jsou stromky vysázeny hustě v řadách. Kamarády jste přesvědčili, aby se pokusu zúčastnili ještě jednou – tentokrát ve školce. Stojíte v jedné z uliček. Písknete poprvé a kamarádi se rozutečou, po chvilce písknete podruhé a všichni se zastaví (obr. 22a).

Nejlépe se poběží Silvii, která běží na sever, a také Julii běžící na jih. Cestou se nemusí vyhýbat žádným smrčkům, a tak se od vás dostanou nejdál. Slávek Veselý, Jarda Vomáčka, Jindra Zindulka a Standa Zelenda, kteří běží v pořadí na severovýchod, jihovýchod, jihozápad a severozápad, se musí prodírat několika řadami stromků. Okolní prostředí je brzdí – neuběhnou tak velkou vzdálenost jako Silvie s Julií. Nejobtížněji se poběží Vendule na východ a Zdeňkovi na západ. Cestou musí překonat nejvíce řad smrčků. Z pohledu shora kamarádi vytvoří křivku podobnou elipse. Školka je dvourozměrné anizotropní prostředí vůči běhání - vaše rychlost záleží na směru, kterým se vydáte.



obr. 22: Kamarádi v lesní školce; diagram velikosti fázové rychlosti v závislosti na směru

Opticky izotropní prostředí je takové, ve kterém se elektromagnetická vlna o dané vlnové délce šíří všemi směry stejně rychle (šíření je ve všech směrech stejně ovlivňováno). Izotropní prostředí má tedy pro každou elektromagnetickou vlnu jedinu hodnotu indexu lomu. Vlnoplochy jsou kulové plochy se středem ve zdroji vlnění.

V **opticky anizotropním** prostředí rychlost vlny závisí na směru šíření, a tak každému směru odpovídá nějaká hodnota indexu lomu.

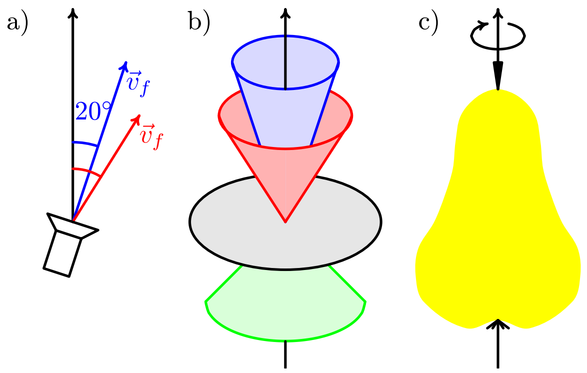
Závislost velikosti fázové rychlosti na směru šíření elektromagnetické vlny v daném dvourozměrném anizotropním prostředí můžeme zobrazit grafem na obrázku 22b. Směr šíření je charakterizován orientovaným úhlem, o který se směr fázové rychlosti vlny odchyluje od předem zvolené poloosy z.

Šíří-li se vlna pod úhlem α, vzdálenost bodu A na elipse od středu elipsy O odpovídá velikosti fázové rychlosti pro daný směr. Z obrázku 22b vidíme, že nejrychleji se vlna šíří přímo nahoru ($\alpha = 0$) a přímo dolů ($\alpha = 180°$). Těmto dvěma směrům připadá tudíž nejmenší hodnota indexu lomu n. Nejpomaleji se budou šířit elektromagnetické vlny kolmo na poloosu z, úhly 90° a 270°. Zde jsou maximální hodnoty indexu lomu.

4.5 Válcově symetrické prostředí

Sedíte v neznámé místnosti na točící židli s baterkou v ruce. Svítíte šikmo, třeba pod úhlem 20° od svislého směru (na obrázku 23a modrý případ). Vlnám, které vysíláte patří jistá hodnota fázové rychlosti. Když se na židli pootočíte, budete svítit jinam, stále však pod stejným úhlem vzhledem k svislému směru. Velikost fázové rychlosti vln se oproti předchozímu případu nezmění. Na míře pootočení nazáleží, a tak všechny stejně dlouhé fázové rychlosti vytvoří modrý kužel, obr. 23b.

Nyní baterku skloníte, změníte úhel třeba na 30° (červený případ). Světeným vlnám teď bude připadat jiná velikost fázové rychlosti. Otočení na židli opět nebude hrát roli. Hmotné prostředí, které se v místnosti nachází, je **válcově symetrické** se svislou osou symetrie. Velikost fázové rychlosti vlny závisí pouze na úhlu, o který se odchylujete od svislé osy, točení na židli vliv nemá. Na obrázku 23b jsou ještě zakresleny černé směry kolmé na osu symetrie a zelené směry odpovídající úhlu 135°.



obr. 23: Válcově symetrické prostředí

Válcově symetrická je například hruška, kterou když roztočíte kolem osy procházející stopkou a bubákem (obr. 23c), tak vypadá stále stejně.

Omezíme-li se ve válcově symetrickém prostředí na rovinu kolmou na osu symetrie, graf popisující velikosti rychlostí vytvoří kružnici – černá kružnice pro šedé směry. Vždy když vodorovně rozříznete hrušku skrz jádřinec, řezem bude kružnice.

Zvolíme-li si ve válcově symetrickém prostředí jakoukoli rovinu obsahující osu symetrie, její graf bude pokaždé stejný. Ať hrušku rozřízneme kteroukoli rovinou obsahující stopku a bubák, získáme vždy stejný tvar.

Pro popis všech směrů v trojrozměrném anizotropním válcově symetrickém prostředí nám stačí znát rozložení rychlostí v libovolné rovině obsahující osu symetrie. (Z libovolného řezu hrušky procházející stopkou a bubákem si vždy představíme celou hrušku.)

Anizotropní prostředí, které budeme dále uvažovat, budou válcově symetrická.

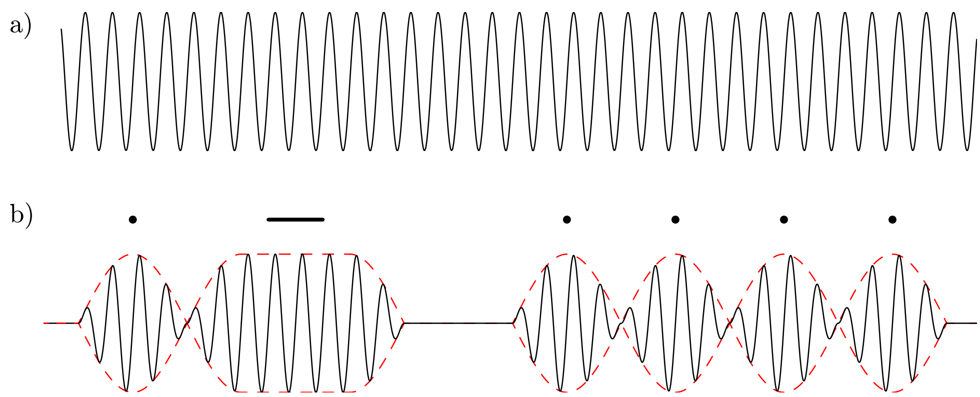
4.6 Grupová rychlost

V noci svítíte baterkou do okna protějšího domu, které patří vašemu kamarádovi ze základní školy. Když budete jen svítit, nic tím nesdělíte (snad jen to, že vám v pokoji něco svítí). Chcete-li poslat nějakou zprávu, musíte blikat; třeba morseovku.

Dlouhá, stále stejná vlna z obrázku 24a v sobě nenese žádnou informaci. Pokud chceme poslat nějaká data, musíme vlnu **modulovat** – měnit její amplitudu (a v důsledku toho i frekvenci). Informace je pak ukryta v **obálce** vlny. Na obrázku 24b jsou první dvě písmena ze slova AHOJ: A tečka, čárka, H čtyři tečky. Obálka je červeně.

Kdybychom svítili žlutým světlem a signál morseovkové čárky by trval půl sekundy, vešlo by se do balíku $3{\cdot}10^{14}$ vlnových délek. V obrázku 24b je v čárkovém balíku nakresleno jen osm vlnek – obrázek je pouze schematický. Číslo $3{\cdot}10^{14}$ získáme snadno: vzdálenost, kterou světlo urazí za půl sekundy, $s = c{\cdot}t \;\Rightarrow\; s = 3{\cdot}10^8{\cdot}0,5\,\mathrm{m} = 1,5{\cdot}10^8\,\mathrm{m}$, vydělíme vlnovou délkou žlutého světla $\frac{s}{\lambda} = \frac{1,5\cdot 10^8}{500\cdot 10^{-9}} = 3 \cdot 10^{14}$.

Poznámka: V praxi se také používá frekvenční modulace, kdy amplituda zůstává konstantní a mění se pouze frekvence vlny. Zkratky u rádií odpovídají amplitudové nebo frekvenční modulaci – AM, FM.



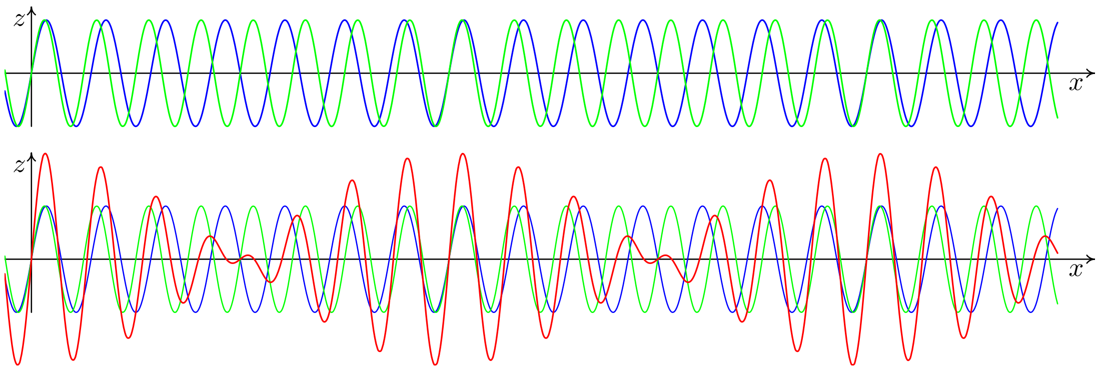
obr. 24: Elektromagnetická vlna bez informace a vlna se vzkazem v morseovce

Rychlost šíření informace (rychlost obálky) má obecně jinou velikost než je velikost fázové rychlosti vlny. Vztah pro „obálkovou" rychlost si odvodíme. Budeme uvažovat nejjednodušší případ, kdy se dvě různé elektromagnetické vlny o úhlových frekvencích ω_1 a ω_2 šíří stejným směrem v izotropním prostředí. Vlny složíme a z průběhu elektrické intenzity E výsledné vlny budeme schopni určit velikost rychlosti obálky. Odvození průběhu E je sice zdlouhavé, ale není příliš obtížné. Budeme upravovat výrazy a použijeme součtové vzorce pro sinus a kosinus, které jsou v tabulkách.

Odvození elektrické intenzity složené vlny

Uvažujme dvě elektromagnetické vlny označené písmeny Z a M, které mají různé úhlové frekvence, různá vlnová čísla a shodné amplitudy. Obě se šíří podél osy x

a jejich elektrické složky E_Z a E_M kmitají do směru osy z, na obrázku 25 zeleně a modře. Díky tomu můžeme elektrickou intenzitu vlny, která vznikne složením zelené a modré vlny, vyjádřit jako součet elektrických intenzit vln původních; $E = E_Z + E_M$. Z výsledné červeně označené intenzity E určíme velikost rychlosti, kterou se šíří informace ukrytá ve vlně. Pro větší přehlednost budeme nejdříve upravovat jednotlivé složky E_Z a E_M zvlášť.



obr. 25: Složením modré a zelené vlny vznikne červená

Elektrické intenzity vln Z a M zapíšeme ve tvaru

$$E_Z = E_A \sin(\omega_Z t - k_Z x), \tag{27}$$

$$E_M = E_A \sin(\omega_M t - k_M x), \tag{28}$$

kde ω_Z a ω_M jsou úhlové frekvence, k_Z a k_M vlnová čísla, E_A je amplituda (stejná pro obě vlny) a t je čas.

Předpokládejme, že naše vlny mají blízké úhlové frekvence lišící se jen o málo. Potom je můžeme vyjádřit pomocí jejich průměrné úhlové frekvence ω a malého „kousíčku" $\Delta\omega$, o který se každá od průměrné hodnoty liší: $\omega_Z = \omega + \Delta\omega$ a $\omega_M = \omega - \Delta\omega$. Podobně zapíšeme pomocí průměrné hodnoty k a kousíčku Δk i jejich vlnová čísla k_Z a k_M: $k_Z = k + \Delta k$ a $k_M = k - \Delta k$. Rovnice (27) a (28) přejdou na tvary

$$E_Z = E_A \sin[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x],$$

$$E_M = E_A \sin[(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x].$$

Kulaté závorky roznásobíme a členy přeskupíme

$$E_Z = E_A \sin[\omega t - kx + \Delta\omega t - \Delta k x],$$

$$E_M = E_A \sin[\omega t - kx - \Delta\omega t + \Delta k x].$$

Pro lepší orientaci si vytvoříme závorky nové

$$E_Z = E_A \sin[(\omega t - kx) + (\Delta\omega t - \Delta kx)],$$

$$E_M = E_A \sin[(\omega t - kx) - (\Delta\omega t - \Delta kx)].$$

První kulatou závorku v obou rovnicích si označíme a a druhou b, vztahy se zjednodušší

$$E_Z = E_A \sin[a + b],$$

$$E_M = E_A \sin[a - b].$$

Uvažujeme dvě vlny, jejichž elektrické intenzity kmitají ve směru osy z. Elektrická intenzita vlny, která vznikne složením vln Z a M, je dána součtem jednotlivých elektrických intenzit; $E = E_Z + E_M$. Obě rovnice sečteme, vytkneme společnou amplitudu a máme tvar

$$E = E_A\{\sin[a + b] + \sin[a - b]\}.$$

Nyní použijeme součtové vzorce[4]

$$\sin[a + b] = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\sin[a - b] = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

a dostáváme

$$E = E_A\{\sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b\}.$$

Třetí člen přičteme k prvnímu a čtvrtý odečteme od druhého. Získáme tvar

$$E = E_A\{2 \sin a \cos b\} = 2E_A \sin a \cos b,$$

který už lépe neupravíme. Nezbývá než se vrátit k původním fyzikálním veličinám ($a = \omega t - kx$, $b = \Delta\omega t - \Delta kx$)

$$E = 2E_A \sin(\omega t - kx) \cos(\Delta\omega t - \Delta kx). \tag{29}$$

Rovnice (29) popisuje průběh elektrické složky vlny, která vznikne složením dvou elektromagnetických vln šířících se podél osy x. Vlny mají shodné amplitudy E_A, blízké úhlové frekvence ω_Z a ω_M a blízká vlnová čísla k_Z a k_M. ω a k značí průměrné hodnoty úhlových frekvencí ω_Z a ω_M a vlnových čísel k_Z a k_M; $\Delta\omega$ je hodnota, o kterou se původní úhlové frekvence liší od průměrné ($\Delta\omega = \omega_Z - \omega = \omega - \omega_M$), podobně pro Δk ($\Delta k = k_Z - k = k - k_M$).

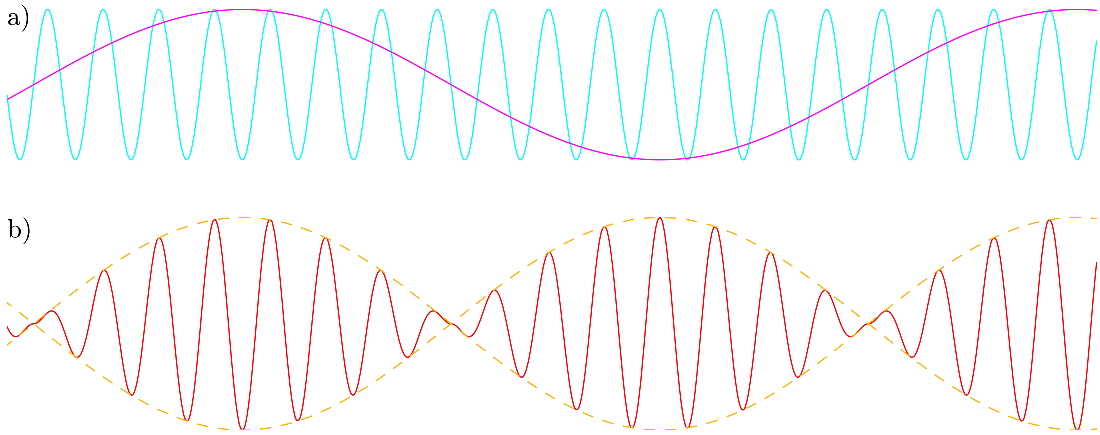
[4] Vzorce nalezneme v tabulkách a platí pro jakékoliv hodnoty a a b.

Rozbor složené vlny

Rovnice (29) popisuje elektrickou složku jisté elektromagnetické vlny. Ihned můžeme říci, že její amplituda je rovna $2E_A$. Bude-li sinus i kosinus roven jedné (popř. mínus jedné), pravá strana nabude maximální hodnoty $2E_A$. Bude-li sinus roven jedné a kosinus mínus jedné nebo naopak, pravá strana bude rovna $-2E_A$. V jakémkoli jiném případě bude součin goniometrických funkcí v intervalu $(-1, 1)$, a tedy hodnota pravé strany padne vždy do intervalu $\langle -2E_A, 2E_A \rangle$.

Část $\sin(\omega t - kx)$ popisuje elektrickou složku elektromagnetické vlny šířící se po směru osy x, jejíž úhlová frekvence je ω a vlnové číslo je k. Pomocí rovnice (13) také určíme velikost rychlosti, jakou se tato vlna šíří prostorem $\frac{\omega}{k}$.

Další část rovnice (29) $\cos(\Delta\omega t - \Delta kx)$ také popisuje elektrickou složku nějaké elektromagnetické vlny šířící se po směru osy x. Tato vlna má úhlovou frekvenci $\Delta\omega$ a vlnové číslo Δk. Velikost rychlosti jejího šíření je tedy $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$.



obr. 26: Přenásobením tyrkysové vlny růžovou vznikne červená (totožná s červenou z obr. 25b)

Na 26a jsou zakresleny obě vlny. Tyrkysová křivka popisuje první část $\sin(\omega t - kx)$ a růžová druhou $\cos(\Delta\omega t - \Delta kx)$. Připomeňme, že $\Delta k \ll k$, proto má růžová vlna mnohem větší vlnovou délku než tyrkysová (pro k platí vztah (14) $\lambda = \frac{2\pi}{k}$). Přenásobíme-li tyrkysovou křivku růžovou, vznikne červená křivka[5] znázorněná na 26b. Jde o výslednou vlnu, která vznikla složením vln modré a zelené z obrázku 25 a která se šíří prostorem.

Elektromagnetické vlně popsané rovnicí (29) přísluší tudíž dvě rychlosti. Rychlost tyrkysové nosné vlny

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \tag{30}$$

[5] Tyrkysová vlna je omezovaná růžovou – je-li „růžový" kosinus v rovnici (29) roven nule, je celá pravá strana rovna nule, ať je „tyrkysový" sinus jakýkoliv.

která odpovídá velikosti fázové rychlosti vlny – rychlosti šíření fáze prostorem. A rychlost růžové obálky

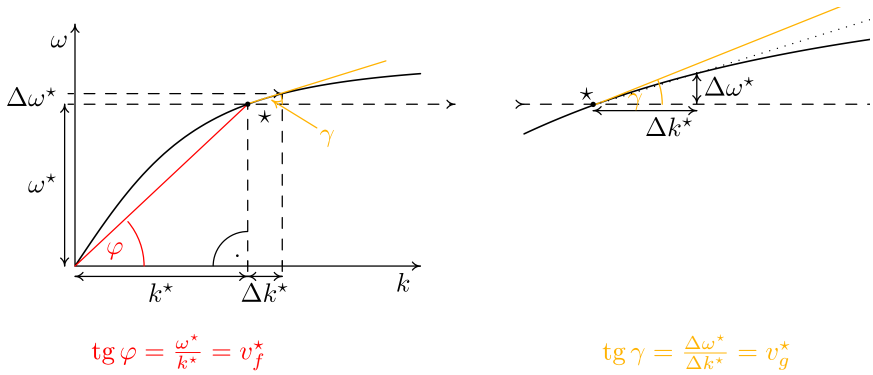
$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}, \tag{31}$$

která odpovídá velikosti rychlosti šíření informace nesené vlnou. Rychlost v_g nazýváme **grupovou rychlostí**, jednotkou je m·s^{-1}.

Na závěr se vratíme se k baterce a blikání. Když váš kamarád „čte” vzkaz, pamatuje si, jak dlouho baterka svítí či nesvítí – vnímá tvar žluté čárkované obálkové vlny z obrázku 26b.

4.7 Velikost fázové a grupové rychlosti

Možná vám připadá, že vztah pro velikost grupové rychlosti $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ je stejný jako vztah pro velikost fázové rychlosti $v_f = \frac{\omega}{k}$; rozdíl mezi nimi si ukážeme na grafu disperzní relace – závislosti úhlové frekvence ω na vlnovém čísle k.



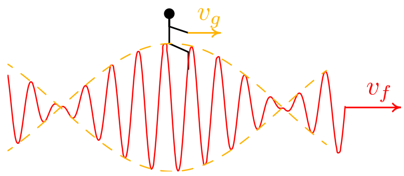
obr. 27: Velikost fázové a grupové rychlosti z disperzní relace ω na k

Graf 27a zobrazuje jistou disperzní relaci. Zvolme si konkrétní elektromagnetickou vlnu a označme si ji hvězdičkou $\star$. Naše vlna má úhlovou frekvenci $\omega^\star$ a vlnové číslo $k^\star$. Z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku 27a určíme velikost fázové rychlosti hvězdičkové vlny. Je rovna tangentě úhlu, který svírá červená přímka procházející bodem $\star$ a počátkem s vodorovnou osou; $v_f^\star = \frac{\omega^\star}{k^\star} = \tan\varphi$ (φ jako **f**ázová).

Velikost grupové rychlosti naší vlny z grafu disperzní relace také vyčteme. Potřebujeme najít $\Delta\omega$ a Δk, $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Při odvozování elektrické intenzity složené vlny jsme si Δk označili malinký „kousíček” vlnového čísla u hodnoty k. Do grafu 27 zakreslíme $\Delta k^\star$ na vodorovnou osu, přesnou délku si zvolíme, třeba 1 cm. Na svislé ose najdeme příslušnou vzdálenost $\Delta\omega^\star$.

Na vedlejším obrázku vidíme zvětšené okolí bodu $\star$ s vyznačenými vzdálenostmi $\Delta k^\star$ a $\Delta\omega^\star$. V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami $\Delta k^\star$ a $\Delta\omega^\star$ a tečkovanou přeponou platí $\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\Delta\omega^\star}{\Delta k^\star}$. Kdybychom zmenšovali $\Delta k^\star$, zmenšovala by se i $\Delta\omega^\star$ a tedy i celý trojúhelníček s vrcholem $\star$. Jeho tečkovaná přepona by se více a více přibližovala žluté tečně grafu v bodě $\star$ a úhel γ by stále lépe odpovídal sklonu křivky v bodě $\star$ (γ jako **g**rupová).

Shrnuto: Je-li dán graf disperzní relace (závislost ω na k), jsme z něj schopni určit velikosti obou rychlostí libovolné elektromagnetické vlny. Velikosti fázové rychlosti v_f odpovídá úhel φ při počátku a velikosti grupové rychlosti v_g sklon grafu v daném bodě, úhel γ. Každý ze vztahů (30) $v_f = \frac{\omega}{k}$ a (31) $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ určuje něco jiného.

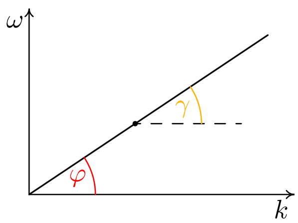


obr. 28: Pro představu v_f a v_g

Představte si, že „sedíte" na obálce vlny, která se s vámi pohybuje doprava žlutou rychlostí. Červená vlna, která je obálkou omezená, se pohybuje rychleji než vy, $v_f > v_g$. Červené kopečky a údolí pod vámi ubíhají, jako by je někdo doprava tahal. V případě rovnosti v_f a v_g je červená křivka se žlutou svázaná a vy sedíte stále nad tím samým červeným kopečkem. Nyní si ukážeme dvě disperzní relace a určíme si velikosti rychlostí v_f a v_g.

Příklad první

Na obrázku 29 vidíme lineární závislost úhlové frekvence ω na vlnovém čísle k. Grupová rychlost má v každém bodě grafu stejnou velikost, protože všem bodům přímky odpovídá stejný sklon. Fázová rychlost je také všude stejná, neboť spojnice libovolného bodu grafu a počátku svírá s vodorovnou osou stále tentýž úhel φ. Dokonce platí, že úhel φ odpovídá sklonu přímky, a tedy platí $v_g = v_f$.



$\gamma = \varphi \Rightarrow v_g = v_f$

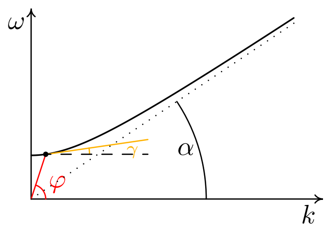
obr. 29: v_f a v_g v nedisperzním prostředí

Připomeneme si obecný vztah mezi ω a k $\quad \omega = \frac{c}{n}k$. Jestliže je grafem přímka procházející počátkem, jde o přímou úměru a zlomek $\frac{c}{n}$ je konstantní. Rychlost světla je neměnná, a tak i n musí být stále stejné. V tomto případě index lomu n nezávisí na vlnové délce (na vlnovém čísle) elektromagnetické vlny – všechny vlny se prostředím šíří stejnou rychlostí, nedochází k disperzi. Obrázek 29 zobrazuje disperzní relaci prostředí, které není disperzní – mohli bychom hovořit o relaci „nedisperzní".

Tato nedisperzní relace odpovídá třeba vakuu, kde $n = 1$, $\omega = ck$ a $v_g = v_f = c$. V jiných nedisperzních prostředích by úhel φ byl menší než u vakua (přímka by tolik nestoupala). Obě rychlosti v_f a v_g by i zde měly shodné velikosti, ale byly by menší než c.

Příklad druhý

Graf na obrázku 30 znázorňuje disperzní relaci, se kterou se ještě setkáme. Pro malá vlnová čísla je úhel φ téměř $\frac{\pi}{2}$, potom $\tan\varphi$ a tedy i velikost fázové rychlosti nabývá libovolně vysokých hodnot (převyšujících c). Zvětšujeme-li k, úhel φ postupně klesá až k úhlu α (pro obrovská k se φ rovná α). Velikost fázové rychlosti v_f tedy s rostoucím k klesá, od libovolně vysokých hodnot k $\tan\alpha$.



obr. 30: v_f a v_g v plazmatu

Grupová rychlost je pro malá k blízká nule, protože křivka vede téměř vodorovně. Zvětšujeme-li vlnové číslo, křivka roste, je strmější a strmější. Pro obrovská k má největší sklon odpovídající úhlu α. Velikost grupové rychlosti v_g s rostoucím k roste, pohybuje se v intervalu $(0, \tan\alpha)$.

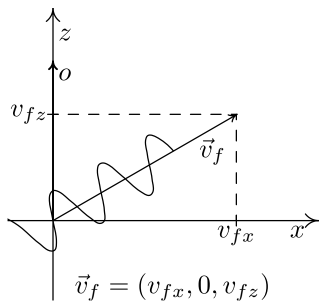
Z předpokladu teorie relativity plyne, že velikost grupové rychlosti (odpovídající šíření informace) nemůže přesáhnout velikost rychlosti světla c. Velikost fázové rychlosti hodnotou c omezená není, protože s ní není spojen přenos informace.

4.8 Vektor fázové rychlosti

Fyzikální veličina rychlost je vektorová veličina – má svoji **velikost**, ale i **směr**. Jdete-li rychlostí 5 km/h do kina je to jiné, než když jdete rychlostí 5 km/h k zubaři, pokud ovšem zubař neordinuje v kinosále.

Už jsme se setkali se třemi rychlostmi (úhlovou, fázovou a grupovou) a o vektorech ještě nebyla kloudná řeč. Pokud jde o úhlovou rychlost u rovnoměrného pohybu po kružnici z první části, není se čemu divit. Úhlová rychlost zde není vektorová veličina ale skalární, jde o úhel φ dělený časem t (vztah (4)). Fázová i grupová rychlost už vektorové veličiny jsou. Jejich velikosti jsme si podrobně popsali v předchozí kapitole, směry přišly na řadu nyní.

Uvažujeme-li rovinnou vlnu procházející izotropním prostředím (kde jsou všechny směry rovnocené) je výhodné zvolit souřadné osy tak, aby se vlna šířila podél jedné z nich (my jsme ji značili x). Můžeme se pak omezit pouze na tento jeden směr a pro rychlost vystačíme s číslem, vektor není potřeba.



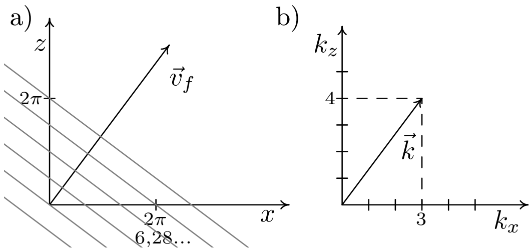
obr. 31: Vektor $\vec{v}_f$

Popisujeme-li šíření vln v anizotropním prostředí, je vhodné souřadné osy svázat s prostředím a nikoli s vlnou. Mějme rovinnou vlnu šířící válcově symetrickým prostředím, obr. 31. Osu symetrie prostředí o ztotožníme s osou z. Válcově symetrické prostředí jinou význačnou osu nemá, zbylé osy už přizpůsobíme vlně. Osu x zvolíme tak, aby se vlna šířila pouze v rovině xz. Osa y pak na obrázku 29 vede kolmo do papíru (osy tvoří pravotočivou soustavu souřadnic, viz strana 10). Chceme-li nyní popsat fázovou rychlost vlny, která se šíří v rovině xz různoběžně s osami x i z, musíme použít vektor $\vec{v}_f = (v_{fx}, 0, v_{fz})$. V obecném případě pak $\vec{v}_f = (v_{fx}, v_{fy}, v_{fz})$.

4.9 Vlnový vektor

Informace o tom, že se vlna nešíří pouze podél osy x, musí být ukryta v rovnici vlny. Vlna z obrázku 31 se pohybuje v rovině xz a průběh velikosti jejího vektoru elektrické intenzity $\vec{E}$ popisuje rovnice $|\vec{E}| = |\vec{E}_A| \sin(\omega t - (k_x x + k_z z))$. Oproti vlně šířící se podél osy x s rovnicí $E = E_A \sin(\omega t - kx)$, připadá naší vlně **vlnový vektor** $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$. Kdyby se vlna z obrázku 31 nešířila jen v rovině xz, rovnice vlny by ještě měla člen $k_y y$ a vlnový vektor by měl tvar $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Vedle fázové rychlosti $\vec{v}_f$ musí být i $\vec{k}$ vektorová veličina.

Hodnoty k_x, k_y a k_z si objasníme na obrázku 32. Na 32a je zakreslena rovinná vlna vlnoplochami a vektorem fázové rychlosti. Vidíme, že na osu x se do vzdálenosti 2π m (přibližně tedy do 6,28 m) vejdou tři vlnoplochy a tedy tři vlnové délky naší vlny, $k_x = 3\,\mathrm{m}^{-1}$. Do stejné vzdálenosti na ose z se vejdou čtyři vlnoplochy, $k_z = 4\,\mathrm{m}^{-1}$. Do směru osy y se vlna vůbec nešíří, a tak $k_y = 0\,\mathrm{m}^{-1}$.



obr. 32: Vektory $\vec{v}_f$ a $\vec{k}$

Obrázek 32b zobrazuje vlnový vektor $\vec{k} = (3, 0, 4)$. Z obrázků vidíme, že směr vlnového vektoru $\vec{k}$ je stejný jako směr fázové rychlosti $\vec{v}_f$ a také, že jsou oba vektory kolmé na vlnoplochy vlny. Velikost vektoru $\vec{k}$ je rovna jeho délce, v našem případě pro $\vec{k} = (3, 0, 4)$ je $|\vec{k}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}\,\mathrm{m}^{-1} = \sqrt{9 + 16}\,\mathrm{m}^{-1} = 5\,\mathrm{m}^{-1}$.

Je-li fázová rychlost elektromagnetické vlny dána vektorem $\vec{v}_f = (v_{fx}, v_{fy}, v_{fz})$, přísluší jí také vlnový vektor $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Oba vektory určují v prostoru stejný směr, který je kolmý k vlnoplochám vlny.

Vektorový tvar rovnice (30) $v_f = \frac{\omega}{k}$ zapíšeme pomocí velikostí vektorů $\vec{v}_f$ a $\vec{k}$

$$|\vec{v}_f| = \frac{\omega}{|\vec{k}|}. \tag{32}$$

Pozor! Podobné vztahy pro jednotlivé složky vektorů $\vec{v}_f$ a $\vec{k}$ neplatí, neboli $v_{fx} \neq \frac{\omega}{k_x}$, $v_{fy} \neq \frac{\omega}{k_y}$ a $v_{fz} \neq \frac{\omega}{k_z}$. Odůvodnění je snadné, protože víme, že vektor fázové rychlosti $\vec{v}_f$ směřuje stejně jako vlnový vektor $\vec{k}$. Je-li například x-ová složka vlnového vektoru $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ze všech tří složek největší, musí být největší i x-ová složka fázové rychlosti $\vec{v}_f = (v_{fx}, v_{fy}, v_{fz})$. Kdybychom užili (výše zmíněné) špatné rovnice, díky podílu by největší složka vlnového vektoru odpovídala nejmenší složce fázové rychlosti a naopak (ω je stále stejná).

Správné vztahy pro jednotlivé složky $\vec{v}_f$ si uvádíme pouze pro úplnost

$$v_{fx} = \frac{\omega k_x}{|k|^2}, \quad v_{fy} = \frac{\omega k_y}{|k|^2}, \quad v_{fz} = \frac{\omega k_z}{|k|^2}. \tag{33}$$

4.10 Definice vektoru grupové rychlosti

V kapitole 4.6 jsme si odvodili vztah pro velikost grupové rychlosti $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ vlny, která se šíří izotropním prostředím podél osy x s vlnovým číslem k a úhlovou frekvencí ω.

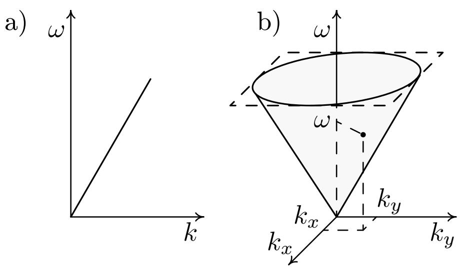
Je-li vlna dána vlnovým vektorem $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, její grupová rychlost bude také vektorová veličina $\vec{v}_g = (v_{gx}, v_{gy}, v_{gz})$, pro kterou platí následující vztahy

$$v_{gx} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_x}, \quad v_{gy} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_y}, \quad v_{gz} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_z}. \tag{34}$$

Abychom si uměli vektor grupové rychlosti představit, budeme opět potřebovat grafy disperzních relací. Tentokrát ovšem bude třeba závislost úhlové frekvence ω na vlnovém vektoru $\vec{k}$.

4.11 Grupová rychlost v nedisperzním izotropním prostředí

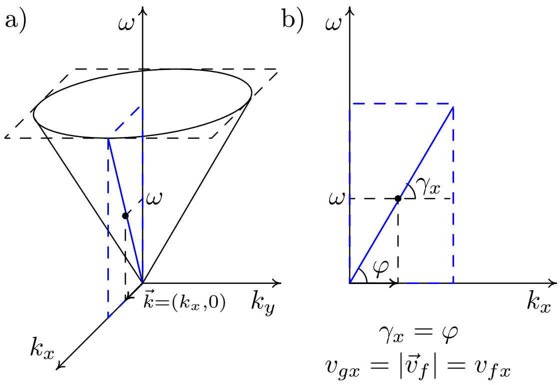
V jednorozměrném prostředí se vlny mohou šířit pouze podél jedné přímky, označme ji x. Uvažujeme-li prostředí nedisperzní, všem vlnám (frekvencím) připadá jediná hodnota fázové rychlosti v_f. Se závislostí ω na k tohoto prostředí jsme se setkali v prvním příkladě v kapitole 4.7. Jde o přímku procházející počátkem, obr. 33a.



obr. 33: Disperzní relace nedisperzní izotropní roviny xy

Náš prostor nyní rozšíříme na izotropní rovinu xy – všechny směry z této roviny bude popisovat tatáž přímka z obrázku 33a. Disperzní relace pro jednotlivé směry dohromady vytvoří kuželovou plochu nad rovinou xy s vrcholem v počátku, obr. 33b. Tato plocha je disperzní relací (grafem závislosti úhlové frekvence ω na vlnovém vektoru $\vec{k}$) roviny xy. Jde o funkci dvou proměnných, tzn. musíte zadat dvě vstupní hodnoty k_x a k_y, abyste získali výsledek ω.

Vrátíme se k původní vlně, která se šíří pouze ve směru osy x, ale stále budeme uvažovat celou rovinu xy (vektory budou mít dvě složky; x-ovou a y-ovou). Vlnový vektor $\vec{k}$ směřuje podél x, $\vec{k} = (k_x, 0)$, $k_x > 0$. Jeho velikost je $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + 0^2} = k_x$.

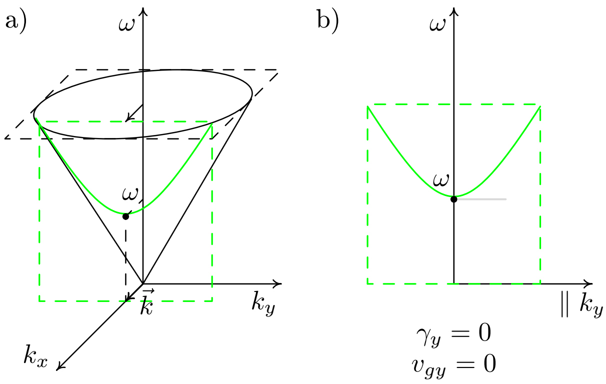


obr. 34: x-ová složka grupové rychlosti

Z grafu 34a odečteme úhlovou frekvenci naší vlny ω a dle rovnice (32) $|\vec{v}_f| = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$ určíme velikost vektoru fázové rychlosti. Fázová rychlost má stejný směr jako vlnový vektor, můžeme ji tedy zapsat ve tvaru $\vec{v}_f = (v_{fx}, 0) = (|\vec{v}_f|, 0)$.

Složky vektoru grupové rychlosti $\vec{v}_g$ jsou dány rovnicemi (34) $v_{gx} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_x}$ a $v_{gy} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_y}$. Zlomek $\frac{\Delta\omega}{\Delta k_x}$ udává sklon funkce ω v závislosti na k_x v bodě označeném puntíkem. Kužel řízneme modrou rovinou, která prochází puntíkem a je kolmá na osu y. Kolmost je nutná proto, aby k_y bylo v celé modré rovině konstantní (v našem případě $k_y = 0$) a my měli závislost <u>pouze</u> na k_x. V modré rovině vidíme potřebnou závislost úhlové frekvence ω na vlnovém čísle k_x. Je to přímka z 33a, ze které jsme vytvořili celý kužel. Složka vektoru grupové rychlosti v_{gx} je dána sklonem modré polopřímky v puntíkovém bodě. Ten je ovšem stejný jako úhel φ, který udává x-ovou složku vektoru fázové rychlosti. Tedy platí $v_{gx} = v_{fx} = |\vec{v}_f|$.

Zbývá určit hodnotu v_{gy}, neboli sklon grafu závislosti úhlové frekvence ω na vlnovém čísle k_y. Teď kužel řízneme zelenou rovinou, která prochází naším puntíkovým bodem a je kolmá na osu x. Získáme tak graf závislosti úhlové frekvence ω pouze na vlnovém čísle k_y; k_x je zde všude stejné. Zelenou křivku (část hyperboly) vidíme na obrázku 35b. Puntík je v jejím minimu (v dolíku). Sklon křivky v minimu je nulový (tečna vede vodorovně) a tedy $v_{gy} = 0 = v_{fy}$.

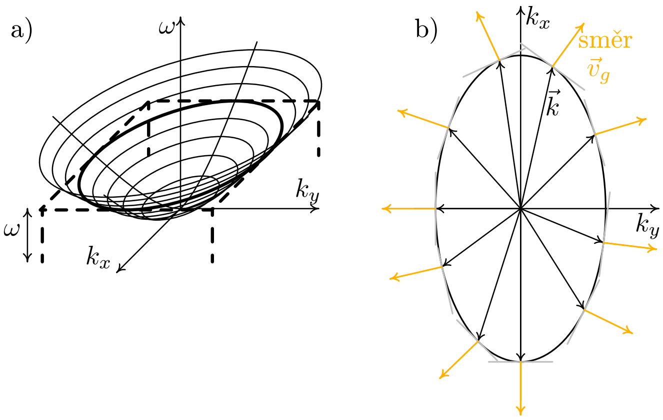


obr. 35: y-ová složka grupové rychlosti

Došli jsme k závěru, že vektor grupové rychlosti $\vec{v}_g$ libovolné vlny v nedisperzním izotropním prostředí je shodný s jejím vektorem fázové rychlosti $\vec{v}_f$, $v_{gx} = v_{fx}$ a $v_{gy} = v_{fy}$, tudíž $\vec{v}_g = \vec{v}_f$. Velikost obou vektorů je pak dána jedinou hodnotou indexu lomu n celého prostředí $|\vec{v}_g| = |\vec{v}_f| = \frac{c}{n}$ (rovnice (23)).

4.12 Směr vektoru grupové rychlosti

souřadnic Vztahy pro výpočet jednotlivých složek vektoru grupové rychlosti jsme si uvedli v kapitole 4.10. Počítat ani odvozovat pomocí nich už nebudeme. Dále budeme potřebovat pouze směr vektoru $\vec{v}_g$, který udává, kudy se informace nesená vlnou šíří. Bez odvozování si teď ukážeme, jak směr $\vec{v}_g$ určit.

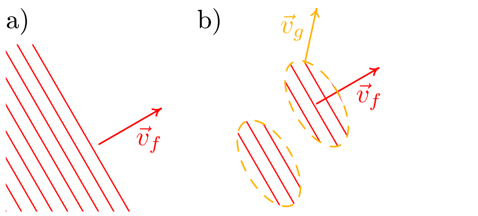


obr. 36: Směry grupové rychlosti

Vyjdeme z disperzní relace dvourozměrného prostředí, roviny xy, kde každé vlně s vlnovým vektorem $\vec{k} = (k_x, k_y)$ je přiřazena její úhlová frekvence ω (s tímto typem grafu jsme se setkali v předchozí kapitole. Graf funkce vytváří plochu nad rovinou xy. Na obrázku 36a disperzní relaci tvoří „zboku sešlápnutá miska”.

Omezíme se pouze na vlny o jediné úhlové frekvenci ω – plochu řízneme černou rovinou rovnoběžnou s xy ve výšce námi zvolené ω, řez je na obr. 36b. Černá křivka odpovídá koncovým bodům vlnových vektorů $\vec{k}$ patřící vlnám o jediné ω.

Směr grupové rychlosti vlny je dán kolmicí k tečně grafu. Vše vidíme na obrázku 36b. Zvolíme si $\vec{k}$, šedě je vyznačena tečna grafu a žlutě její kolmice. Vektor $\vec{v}_g$ vlny s vlnovým vektorem $\vec{k}$ směřuje jako žlutá šipka. Pozor, jeho velikost šipka už neurčuje, získali jsme pouze směr.



obr. 37: Odlišné směry vektorů $\vec{v}_g$ a $\vec{v}_f$

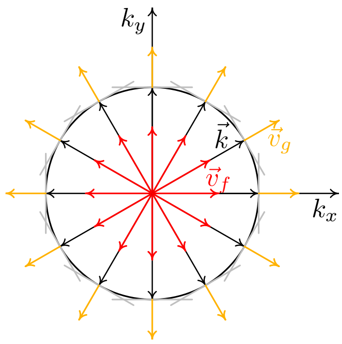
Na obrázku 36b je zobrazeno několik dalších vlnových vektorů se svými směry $\vec{v}_g$. Jelikož vektor fázové rychlosti vlny směřuje vždy jako $\vec{k}$ (kapitola 4.9), směry rychlostí $\vec{v}_f$ a $\vec{v}_g$ připadající jedné vlně se mohou lišit. V našem případě platí $\vec{v}_g \parallel \vec{v}_f$ jen, když $\vec{v}_f$ (resp. $\vec{k}$) míří podél x nebo y. V ostatních případech každá z rychlostí $\vec{v}_f$ a $\vec{v}_g$ směřuje jinam.

Na obrázku 37a je zobrazena vlna pomocí vlnoploch. Vlnoplochy se prostorem pohybují rychlostí popsanou červeným vektorem[6], který odpovídá fázové rychlosti vlny. Pokud vlnou pošleme informaci, vytvoříme jakési balíčky (kapitola 4.6). Tyto balíčky (37b žlutě) se mohou pohybovat jiným směrem, než se uvnitř nich pohybují vlnoplochy.

[6]Směřujícím vždy kolmo na vlnoplochy.

Směry $\vec{v}_g$ a $\vec{v}_f$ v izotropním prostředí

V izotropním prostředí platí, že velikost fázové rychlosti vlny nezávisí na jejím směru. Když jsou vektory $\vec{v}_f$ pro jednu úhlovou frekvenci ω do všech směrů stejně dlouhé, pak i všechny vlnové vektory mají stejnou velikost, rovnice (32) $|\vec{k}| = \frac{\omega}{|\vec{v}_f|}$. Disperzní relací pro konstantní ω (analogickou k černému řezu v předchozí kapitole) je tedy vždy kružnice s poloměrem $|\vec{k}|$. Kdekoli si ke kružnici vytvoříme tečnu a k ní kolmici, vždy bude rovnoběžná s příslušným vlnovým vektorem $\vec{k}$ a tedy i s vektorem fázové rychlosti $\vec{v}_f$, obr. 38.



obr. 38: Směry $\vec{v}_g$ v izotropním prostředí

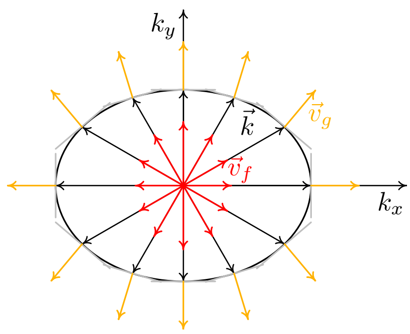
V izotropním prostředí je vektor grupové rychlosti $\vec{v}_g$ vždy rovnoběžný s vektorem fázové rychlosti $\vec{v}_f$.

Celá disperzní relace izotropní roviny xy musí být plocha, která má všechny vodorovné řezy kružnice (kužel, nesešlápnutá miska, otočený zvonek bez srdce). Takové plochy vzniknou otáčením nějaké křivky okolo svislé osy z. Původní křivka popisuje jeden směr z roviny xy, ale díky izotropii odpovídá všem směrům z xy. V kapitole 4.11 jsme z jedné polopřímky vytvořili celý kužel.

Směry $\vec{v}_g$ a $\vec{v}_f$ v anizotropním prostředí

V anizotropním prostředí velikost fázové rychlosti elektromagnetické vlny závisí na jejím směru. Když jsou vektory $\vec{v}_f$ patřící vlnám s jedinou ω různě dlouhé, pak jsou různě dlouhé i jejich vlnové vektory $\vec{k}$ dané rovnicí (32) $|\vec{k}| = \frac{\omega}{|\vec{v}_f|}$.

Jedna z možných disperzních relací pro neměnnou ω je na obrázku 39. Vytvoříme-li ke křivce šedé tečny a k nim žluté kolmice, je jasně vidět, že existují směry, kde vektory rychlostí $\vec{v}_f$ a $\vec{v}_g$ míří odlišně.



obr. 39: Směry $\vec{v}_g$ v anizotropním prostředí

V anizotropním prostředí vektor grupové rychlosti $\vec{v}_g$ obecně není rovnoběžný s vektorem fázové rychlosti $\vec{v}_f$. Informace nesená vlnou se pak šíří jiným směrem v prostoru, než jakým se pohybují vlnoplochy.