

7 Vlny v plazmatu s magnetickým polem

V této části textu využijeme téměř vše, co jsme si doposud řekli. Homogenní magnetické pole (část 6) vytváří v plazmatu (část 5) anizotropní, válcově symetrické prostředí (část 4) vzhledem k šíření elektromagnetických vln (část 3).

Budeme uvažovat pouze studené plazma, jehož částice nevykonávají žádný chaotický pohyb. Volné elektrony se pak pohybují pouze v důsledku působení nějakého elektrického nebo magnetického pole.

Vektor elektrické intenzity vlny budeme značit \vec{E} , vektor magnetické indukce \vec{B} . Pro označení vnějšího magnetického pole použijeme \vec{B}_0 . Jeho velikost bude vždy výrazně větší než velikost magnetického pole libovolné vlny, $|\vec{B}| \ll |\vec{B}_0|$. Vnější pole \vec{B}_0 budeme uvažovat pouze homogenní a směřující ve směru osy z .

Uvedené závěry nebudeme odvozovat – k tomu je třeba umět řešit diferenciální rovnice, kde neznámá není číslo ale funkce. V odvození se vychází z druhého Newtonova zákona $\vec{F} = m\vec{a}$ a pohybové rovnice nabitě částice v elektromagnetickém poli $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0)$. Dále jsou třeba Maxwellovy rovnice, které popisují chování elektromagnetického pole.

7.1 Mezní frekvence

Elektromagnetická vlna o velmi vysoké frekvenci, která se šíří vakuem, narazí na rozhraní vakua s plazmatem bez vnějšího magnetického pole. Jak jsme si řekli v kapitole 5.9, vlna prochází do plazmatu, neboť volné elektrony nestíhají odstínit rychle se měnící elektrické pole vlny. Frekvence vlny se nezmění, je stálá v jakémkoli prostředí (kapitola 4.2). Vlnová délka zůstává také beze změn.

Vyšleme-li vlnu s nižší frekvencí (její úhlová frekvence ω je stále ještě vyšší než plazmová frekvence plazmatu ω_p), vlna projde do plazmatu. Frekvence vlny se nezmění, ale pohyb nabitých částic v plazmatu způsobí protažení vlnové délky vlny. Se vzrůstem vlnové délky λ souvisí vzrůst fázové rychlosti – jednotlivé vlny jsou delší a vytváří se stejným tempem, konkrétní fáze se tedy za stejný čas dostane dál. Naší vlně přísluší fázová rychlost větší než c , kterou vlna měla ve vakuu, $v_f > c$. Grupová rychlost vlny klesne.

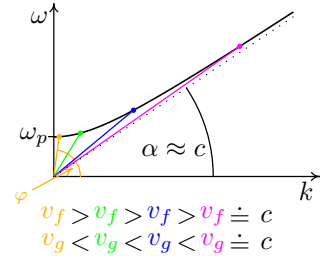
Bude-li frekvence, resp. úhlová frekvence vlny, stále bližší plazmové frekvenci prostředí, vlnová délka vlny v plazmatu bude delší a delší až bude nejdélší na celém světě. Spolu s vlnovou délkou poroste k nekonečným hodnotám také velikost fázové rychlosti. Grupová rychlost naopak bude klesat k nule, informace nesená takovou vlnou se nikam nepřenesou.

Frekvenci vlny, při které vlnová délka a fázová rychlost roste nade všechny meze, nazýváme **mezní frekvencí**. Pro vlny s touto frekvencí index lomu n klesá k nule,

$n = \frac{c}{v_f}$ vztah (23). Vlna s mezní frekvencí nepřenese žádnou informaci, její grupová rychlost je rovna nule.

Jestliže vyšleme elektromagnetickou vlnu s frekvencí, resp. úhlovou frekvencí, rovnou nebo nižší plazmové frekvenci plazmatu, $\omega \leq \omega_p$, vlna se od plazmatu odrazí nazpět.

Na obrázku 54 je disperzní relace, která popisuje chování elektromagnetických vln v plazmatu. S grafem jsme se už setkali ve druhém příkladě kapitoly 4.7. Vidíme, že vlny s $\omega < \omega_p$ se prostředím nešíří – nepřipadá jim žádné vlnové číslo. Žlutě značené vlny s úhlovou frekvencí těsně nad ω_p , mají velký úhel φ a tedy i velkou v_f . Velikost grupové rychlosti žluté vlny je naopak téměř nulová, křivka ve žlutém bodě skoro neroste.



obr. 54: Závislost ω na k

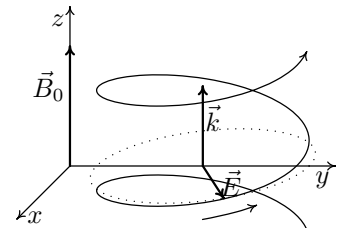
Pohybujeme-li po grafu k vyšším frekvencím, fázová rychlost postupně klesá a grupová roste. Ružově označená vlna s vysokou ω má $v_f \doteq \gamma \doteq \alpha$, a tudíž $v_f \doteq v_g \doteq c$, šíří se jako ve vakuu.

7.2 Rezonance

Na obrázku 55 je znázorněna elektromagnetická kruhově polarizovaná vlna šířící se plazmatem ve směru magnetického pole; vlnový vektor \vec{k} je rovnoběžný s vektorem \vec{B}_0 . Díváme-li se po směru vnějšího magnetického pole \vec{B}_0 , vektor elektrické intenzity vlny \vec{E} opisuje kružnici po směru hodinových ručiček. Pod vlivem tohoto elektrického pole se volné elektrony plazmatu pohybují v rovinách kolmých na směr magnetického pole \vec{B}_0 , a jejich trajektorie jsou vnějším polem zakřivovány také ve směru chodu hodinových ručiček (kapitola 6.4, obr. 49).

Úhlová rychlost krouživých pohybů, cyklotronová frekvence, všech elektronů je dána vztahem (49) $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$.

Jestliže se úhlová frekvence vlny z obrázku 55 přibližuje k cyklotronové frekvenci elektronů v plazmatu, prostředí se stává pro vlnu hůře průchodné. Stále větší část energie vlny využívají volné elektrony pro svůj krouživý pohyb. Index lomu postupně roste nade všechny meze, fázová rychlost klesá k nule, vlna se přestává šířit. Říkáme, že nastává **rezonance**. Při rezonanci je vedle fázové rychlosti nulová také vlnová délka. Vlna s danou frekvencí ω , která nikam nepostupuje ($v_f = 0$), musí mít vlnovou délku rovnou nule.



obr. 55: Kruhově pol. vlna

Při rezonanci je vlna prostředím absorbována, při mezní frekvenci se od plazmatu odráží.

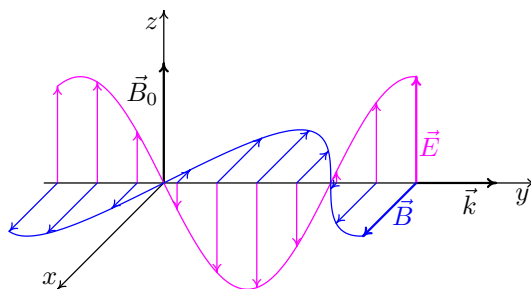
7.3 Elektromagnetické vlny ve směru kolmém na \vec{B}_0

Ukážeme si chování dvou význačných vln, které se šíří studeným plazmatem kolmo na vnější magnetické pole. Ostatní vlny šířící se stejným směrem lze z těchto „základních“ vždy složit.

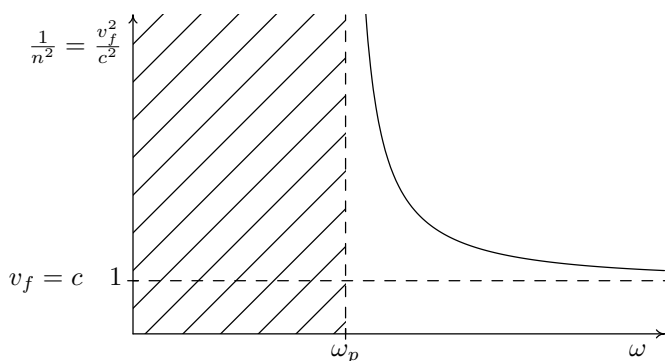
Řádná vlna

Jako první si rozebereme elektromagnetickou vlnu šířící se plazmatem ve směru osy y ($\vec{k} \parallel y$), jejíž elektrická složka \vec{E} kmitá rovnoběžně s vnějším magnetickým polem \vec{B}_0 a magnetická složka \vec{B} podél osy x (obr. 56).

Na nabitě částice plazmatu působí elektrické pole vlny a rozpohybuje je podél vnějšího magnetického pole nahoru a dolů. Z části 6.3 víme, že když se nabitá částice pohybuje v magnetickém poli rovnoběžně s \vec{B}_0 , není její pohyb tímto polem nijak ovlivněn. Naše elektromagnetická vlna tak žádné vnější magnetické pole „necítí“, neboť okolní prostředí se chová stejně, jako kdyby tam žádné magnetické pole nebylo.



obr. 56: Řádná vlna



obr. 57: Disperzní relace řádné vlny

Stoupáme-li po svislé ose nahoru, velikost fázové rychlosti roste; index lomu naopak klesá. Jednička na svislé ose odpovídá případu, kdy se velikost fázové rychlosti vlny rovná rychlosti světla ($1 = \frac{v_f^2}{c^2} \Rightarrow v_f = c$). Index lomu je zde roven jedné. Nekonečně vysoké hodnoty odpovídají mezní frekvenci – zlomek $\frac{v_f^2}{c^2}$ je nekonečný, tak i v_f je nekonečná. Při nulové hodnotě na svislé ose dochází k rezonanci – zlomek $\frac{v_f^2}{c^2}$ je nulový

*Lineárně polarizovaná vlna z obrázku 56 se nazývá **řádná vlna** a budeme ji značit písmenem O (z angl. ordinary wave). Šíření řádné vlny nezávisí na vnějším magnetickém poli.*

Na obrázku 57 je graf závislosti $\frac{v_f^2}{c^2}$ na úhlové frekvenci vlny ω (jde o typ disperzní relace). Dle vztahu (23) můžeme poměr $\frac{v_f^2}{c^2}$ vyjádřit zlomkem $\frac{1}{n^2}$.

a tudíž v_f je nulová.

Z disperzní relace řádné vlny vidíme, že pro $\omega < \omega_p$ se vlna prostředím vůbec nešíří – vyšrafovaná oblast. Plazmová frekvence ω_p je mezní frekvencí řádné vlny (fázová rychlost nekonečná, index lomu nulový). Se zvyšující se úhlovou frekvencí vlny klesá velikost fázové rychlosti, index lomu naopak roste od nuly až k jedničce. Pro obrovské frekvence, je fázová rychlost téměř rovna c a index lomu jedničce – vlna prochází plazmatem stejně jako vakuem.

Mimořádná vlna

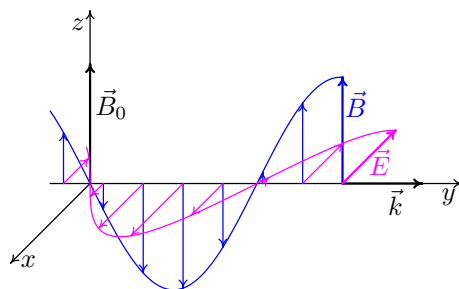
Mohli bychom předpokládat, že druhou „základní“ vlnou šířící se kolmo na magnetické pole, bude také lineárně polarizovaná vlna s $\vec{k} \parallel y$, $\vec{E} \parallel x$ a $\vec{B} \parallel z$ z obrázku 58. Ovšem ukazuje se, že taková vlna v plazmatu s vnějším magnetickým polem \vec{B}_0 vůbec nemůže existovat.

Vlna musí být elipticky (popř. kruhově) polarizovaná v rovině kolmé na magnetické pole \vec{B}_0 . Vektor elektrické intenzity vlny má tedy nejen x -ovou ale i y -ovou složku, $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$, jak vidíme na obrázku 59. (V případě rovnosti $E_{xA} = E_{yA}$ jde o kruhovou polarizaci.)

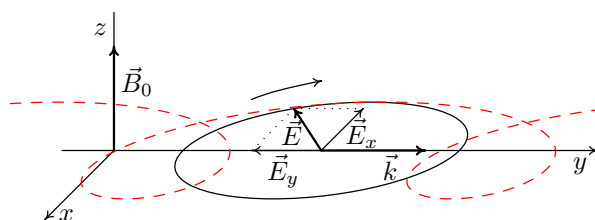
Složka E_x odpovídá normální příčné elektromagnetické vlně s $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ z obrázku 58. Složka E_y odpovídá podélné vlně, kde vektor elektrické intenzity \vec{E} kmitá rovnoběžně s vlnovým vektorem \vec{k} . Této vlně úplně chybí magnetická část \vec{B} a nazývá se elektrostatická. V plazmatu tvoří obě složky E_x a E_y jedinou vlnu a jsou navzájem neoddelitelné. Vektor elektrické intenzity \vec{E} celé vlny opisuje červenou křivku z obrázku 59 (pohyb po elipse, která se posunuje doprava).

*Elipticky (kruhově) polarizovaná vlna v rovině kolmé na vnější magnetické pole \vec{B}_0 , která se šíří studeným plazmatem ve směru kolmém k \vec{B}_0 , se nazývá **mimořádná vlna**. Konec vektoru \vec{E} obíhá po křivce, kterou vidíme na obrázku 59 červeně. Mimořádná vlna se značí písmenem X (z angl. extraordinary wave).*

Chování mimořádné vlny je složitější než vlny řádné, neboť vnější magnetické pole \vec{B}_0 ovlivní pohyb volných elektronů, které se rozhýbaly díky elektrickému poli vlny v rovině kolmé na \vec{B}_0 . Disperzní relace X-vlny je na obrázku 60.

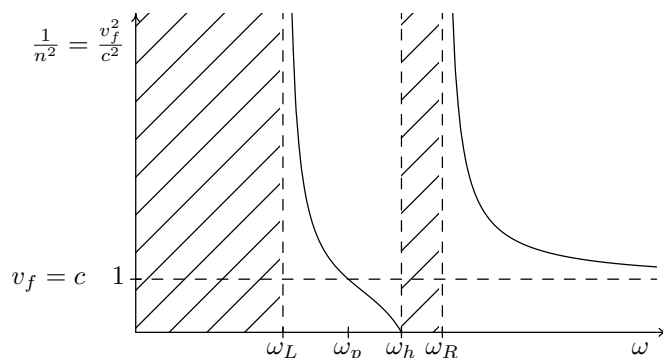


obr. 58: V plazmatu neexistující vlna



obr. 59: Mimořádná vlna

Mimořádná vlna má dvě oblasti šíření a dvě zakázaná pásma. V prvním povoleném pásmu velikost fázové rychlosti nabývá všech možných hodnot; pro $\omega = \omega_p$ je $v_f = c$. V druhém pásmu najdeme hodnoty pouze z intervalu (c, ∞) – fázové rychlosti vln s vysokými frekvencemi považujeme za rovnou rychlosti světla.



obr. 60: Disperzní relace mimořádné vlny

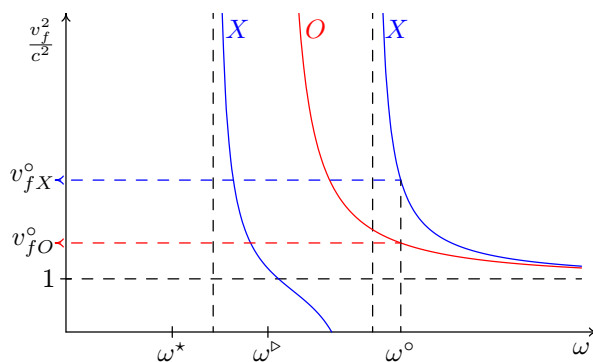
V hodnotách ω_L a ω_R má mimořádná vlna mezní frekvence, rezonance nastává jednou při $\omega = \omega_h$. Hodnoty ω_L , ω_R i ω_h závisí jak na plazmové frekvenci ω_p (a tedy na hustotě plazmatu N , $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$), tak na cyklotronové frekvenci ω_c (a tudíž na vnějším magnetickém poli B_0 , $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$)⁹.

Řádná vlna s mimořádnou dohromady

Mějme elektromagnetickou vlnu šířící se plazmatem kolmo na směr vnějšího magnetického pole \vec{B}_0 . Naše vlna se dá rozložit na dvě složky – řádnou a mimořádnou. Na obrázku 61 vidíme disperzní relace obou vln v jediném grafu.

Je-li úhlová frekvence vlny ω° , z obrázku 61 vyčteme, že řádná vlna postupuje plazmatem s fázovou rychlostí menší než mimořádná, $v_{fO}^\circ < v_{fX}^\circ$. Pro grupové rychlosti platí opačný vztah, $v_{gO}^\circ > v_{gX}^\circ$, řádná vlna přeneše informaci na stejné vzdálenosti rychleji než mimořádná.

Má-li naše vlna v plazmatu úhlovou frekvenci rovnou ω^\flat , pak jde čistě o vlnu mimořádnou – řádná vlna o úhlové frekvenci ω^\flat se v plazmatu nemůže vyskytovat. Kdybychom vyslali do vakua elektromagnetickou vlnu s ω^\flat a s $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$ (obr. 56), tak až dojde k plazmatu, odrazí se od něj zpět.



obr. 61: Řádná (červeně) a mimořádná vlna (modře)

⁹vztahy pro ω_L , ω_R a ω_h vyplynou z úprav pohybových rovnic:
 $\omega_L = \frac{1}{2}(-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2})$, $\omega_R = \frac{1}{2}(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2})$, $\omega_h = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_p^2}$

A naposledy, elektromagnetická vlna s úhlovou frekvencí ω^* se plazmatem ve směru kolmém na \vec{B}_0 šířit nemůže. Přejde-li jakákoli vlna s $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ na rozhraní vakua s plazmatem, tak se celá odráží zpět.

Šíří-li se elektromagnetická vlna plazmatem kolmo na magnetické pole \vec{B}_0 , lze rozložit na řádnou a mimořádnou část. Chování obou složek je navzájem nezávislé.

Všimněme si ještě, že se křivky grafů pro řádnou a mimořádnou vlnu nikde neprotínají. Pro konkrétní úhlovou frekvenci ω je vždy velikost fázové rychlosti řádné vlny jiná než velikost fázové rychlosti vlny mimořádné. Uvažujeme-li velmi vysoké frekvence, pak fázové rychlosti obou částí můžeme považovat za shodné a rovny c .

7.4 Elektromagnetické vlny rovnoběžné s \vec{B}_0

Ve směru rovnoběžném s magnetickým polem vystačíme také se dvěma „základními“ vlnami.

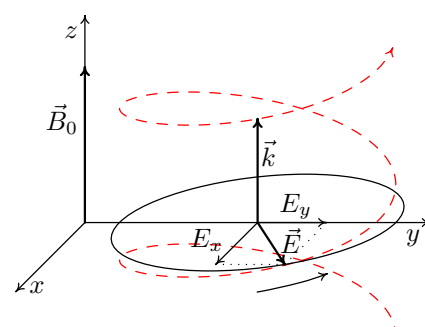
Pravotočivá vlna

Představme si elektromagnetickou vlnu šířící se podél vnějšího magnetického pole \vec{B}_0 , jejíž vektor elektrické intenzity \vec{E} je kruhově polarizován v rovině kolmé k \vec{B}_0 a při pohledu ve směru \vec{B}_0 se otáčí po směru hodinových ručiček. S touto vlnou jsme si už setkali v kapitole o rezonanci. Vektor magnetické indukce \vec{B} naší vlny se také otáčí po směru hodinových ručiček v rovině kolmé na \vec{B}_0 a vždy ukazuje kolmo k \vec{E} .

Elektrické pole vlny rozhýbe volné elektrony v plazmatu v rovinách kolmých na vnější magnetické pole \vec{B}_0 , to bude jejich trajektorie zakřivovat také do směru hodinových ručiček. Všechny elektrony budou kroužit se stejnou frekvencí odpovídající jejich cyklotronové frekvenci ω_c . Frekvence vlny neovlivňuje frekvenci pohybu elektronů, vlna jej pouze umožní.

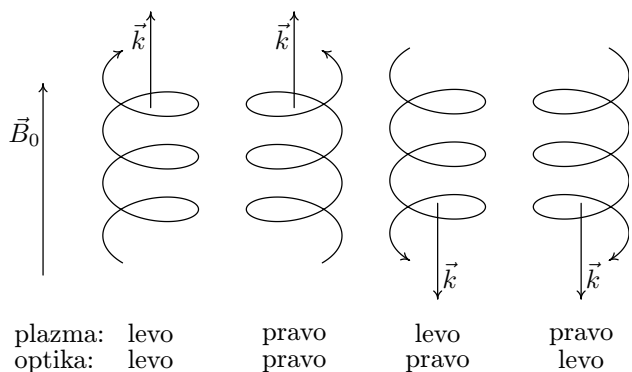
*Kruhově polarizovanou vlnu, která se šíří studeným plazmatem rovnoběžně s magnetickým polem a jejíž vektor elektrické intenzity \vec{E} se při pohledu ve směru \vec{B}_0 otáčí ve směru hodinových ručiček, nazýváme **pravotočivou vlnou** a značíme ji písmenem R (z angl. *right-handed wave*). Konec vektoru \vec{E} v prostoru opisuje pravotočivý šroub.*

Pojem pravotočivá vlna se používá v řadě oblastech fyziky, ovšem může být různě definovaný. My jsme smysl otáčení vztáhli k vnějšímu magnetickému poli – palec pravé ruky ukazuje ve směru \vec{B}_0 , pokud ohnuté prsty ruky ukazují směr rotace



obr. 62: Pravotočivá vlna

vektoru \vec{E} ve vlně, pak je vlna pravotočivá (v opačném případě je levotočivá). Šířili se elektromagnetické vlny plazmatickým prostředím, pak pravotočivým (druhé a čtvrté z obr. 63) případnou vždy shodné velikosti rychlostí.



obr. 63: Odlišné definice pravotočivé a levotočivé vlny; pohled shora jako na obr. 53

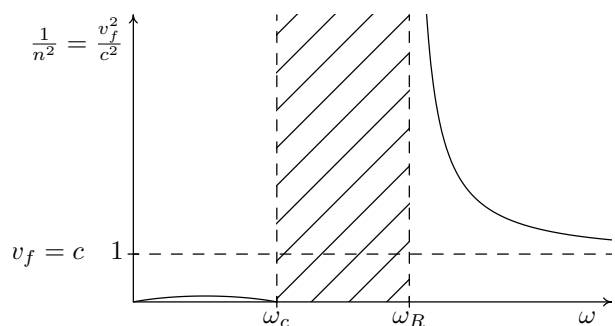
V optice se pravotočivost resp. levotočivost definuje vzhledem k vlnovému vektoru vlny \vec{k} (směru šíření vlny), nikoli vzhledem k okolnímu prostředí. Palec pravé ruky ukazuje ve směru šíření vlny, jestliže prsty odpovídají směru otáčení vektoru \vec{E} , vlna je pravotočivá. V optických prostředích také platí, že pravotočivým vlnám (tentokrát ale druhé a třetí) vždy odpovídají stejné velikosti rychlostí, které mohou být odlišné od levotočivých.

Kruhově nebo elipticky polarizovanou vlnu lze složit ze dvou lineárně polarizovaných, ovšem díky krouživému pohybu volných elektronů v plazmatu s magnetickým polem je vhodné za „základní kameny“ volit právě pravotočivou a (jak uvidíme dále) levotočivou elektromagnetickou vlnu.

Z kapitoly 7.2 o rezonanci už víme, že pravotočivá vlna s úhlovou frekvencí rovnou cyklotronové frekvenci $\omega = \omega_c$, je s plazmatem v rezonanci. Volné elektrony využijí veškerou energii vlny ke svému krouživému pohybu. Na obrázku 64 vidíme celou disperzní relaci R-vlny.

Pravotočivá vlna má dvě oblasti šíření. V oblasti nízkých frekvencí je fázová rychlost R-vlny menší než c , v druhém pásmu je tomu naopak. Vlny o vysokých frekvencích plazma téměř neovlivňuje, jejich fázová rychlost je stejná jako ve vakuu.

Vedle rezonance má pravotočivá vlna jednu mezní frekvenci při $\omega = \omega_R$. S ω_R jsme se setkali už u mimořádné vlny, ω_R je závislá na plazmové i cyklotronové frekvenci¹⁰.

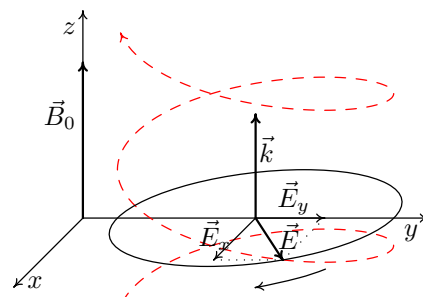


obr. 64: Disperzní relace pravotočivé vlny

¹⁰ $\omega_R = \frac{1}{2}(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2})$

Levotočivá vlna

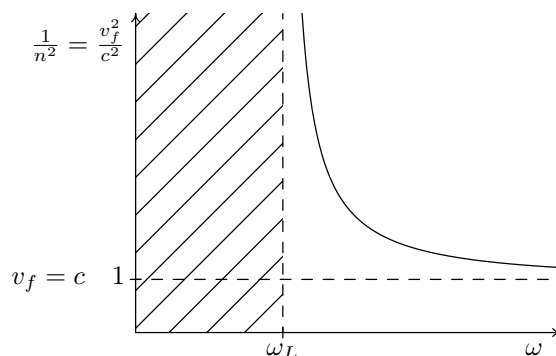
Na obrázku 65 je zakreslena kruhově polarizovaná elektromagnetická vlna s $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ a s vektorem elektrické intenzity \vec{E} otáčejícím se proti směru hodinových ručiček, díváme-li se po směru vektoru \vec{B}_0 . Elektrické pole vlny rozhýbe volné elektrony plazmatu. Jejich trajektorie jsou vnějším magnetickým polem \vec{B}_0 zakřívovány do opačného směru než v jakém rotuje vektor \vec{E} . Znovu připomeňme, že frekvence s jakou krouží volné elektrony není závislá na frekvenci vlny, ale je vždy rovna cyklotronové frekvenci ω_c .



obr. 65: Levotočivá vlna

*Kruhově polarizovaná elektromagnetická vlna z obrázku 65 se nazývá **levotočivá vlna**. Při pohledu po směru vnějšího magnetického pole \vec{B}_0 vektor elektrické intenzity \vec{E} obíhá proti směru hodinových ručiček, v prostoru pak konec vektoru opisuje levotočivý šroub. Levotočivou vlnu označujeme písmenem L (angl. left-handed wave).*

Disperzní relaci levotočivé vlny vidíme na obrázku 66. Z grafu vyčteme, že nižší frekvence se plazmatem nešíří, vyšší ano. Hranicí je mezní frekvence ω_L , kterou už známe od mimořádné vlny. Hodnota ω_L je dána hustotou plazmatu a velikostí vnějšího magnetického pole¹¹.



obr. 66: Disperzní relace levotočivé vlny

Doposud jsme uvažovali plazmatické prostředí, ve kterém se ionty vůbec nepohybují, ovšem při zkoumání vln o velmi nízkých frekvencích je tento model příliš hrubý. Připustíme-li pohyb iontů, nalezneme u levotočivé vlny rezonanční frekvenci rovnou cyklotronové frekvenci kladně nabitých iontů. Při úhlové frekvenci vlny ω blízké cyklotronové frekvenci iontů, částice využijí energii vlny pro svůj krouživý levotočivý pohyb v rovinách kolmých k \vec{B}_0 .

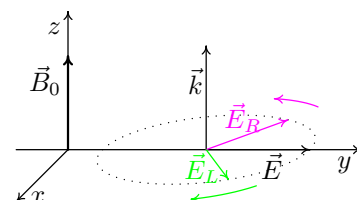
Vodíkový kationt H^+ má $1840\times$ větší hmotnost než elektron. Ze vztahu (49) pro cyklotronovou frekvenci nabitě částice, $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$, snadno usoudíme, že cyklotronová frekvence iontu je $1840\times$ menší než elektronu. U ostatních prvků je poměr hmotností ještě větší a tudíž poměr cyklotronových frekvencí ještě menší.

¹¹ $\omega_L = \frac{1}{2}(-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2})$

Povolený pohyb iontů výrazně změní disperzní relaci levotočivé vlny. Podobně jako pravotočivá vlna bude mít povolené pásmo v oblasti nízkých frekvencí shora omezené rezonanční frekvencí, iontovou cyklotronovou frekvencí.

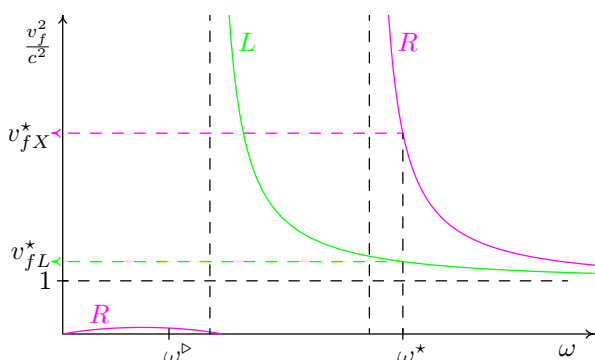
Pravotočivá vlna dohromady s levotočivou

Mějme lineárně polarizovanou vlnu šířící se podél osy z s \vec{E} kmitajícím podél osy y . Naši vlnu lze rozložit do pravotočivé a levotočivé vlny, jejichž vektory elektrické intenzity mají poloviční délku amplitudy lineárně polarizované vlny. V každém okamžiku se y -ové složky točivých vln sečtou a x -ové se přesně vyruší, obr. 67. Výsledný vektor elektrické intenzity $\vec{E} = \vec{E}_R + \vec{E}_L$ tak kmitá pouze podél osy y .



obr. 67: Lineárně polarizovaná vlna složená z levo a pravotočivé

Z grafu na obrázku 68 snadno zjistíme, že narazí-li lineárně polarizovaná vlna o úhlové frekvenci ω^\triangleright na plazma s magnetickým polem, pravotočivá část proniká do prostředí a šíří se dál s fázovou rychlostí v_{fR}^\triangleright . Levotočivá část vlny se odráží nazpátek, protože se plazmatem šířit nemůže.



obr. 68: Pravotočivá a levotočivá vlna

Má-li lineárně polarizovaná vlna úhlovou frekvenci ω^* , pak celá proniká do plazmatu. Pravotočivé části vlny případně velikost fázové rychlosti v_{fR}^* , levotočivé pak v_{fL}^* .

U elektromagnetických vln šířících se podél magnetického pole také platí naprostá nezávislost pravotočivé a levotočivé části vlny.

Překryjeme-li grafy přes sebe, zjistíme, že se křivky nikde neprotínají – pro libovolnou úhlovou frekvenci ω se

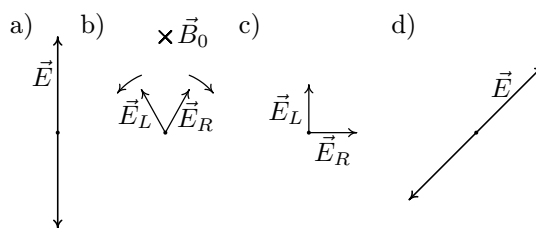
pravotočivá vlna šíří jinou fázovou rychlostí než levotočivá.

Faradayova rotace

Představme si lineárně polarizovanou vlnu, která se šíří vodorovně směrem od nás a jejíž vektor elektrické intenzity \vec{E} kmitá svisle, obr. 69a.

Vlna vstoupí do plazmatického prostředí s vnějším magnetickým polem \vec{B}_0 . Vektor \vec{B}_0 míří vodorovně od nás, rovnoběžně se směrem šíření naší vlny. Lineárně polarizovaná vlna se rozloží na pravotočivou a levotočivou část (obr. 69b) a každá z nich se dál šíří jinou fázovou rychlostí, uvažujme $v_{fL} < v_{fR}$.

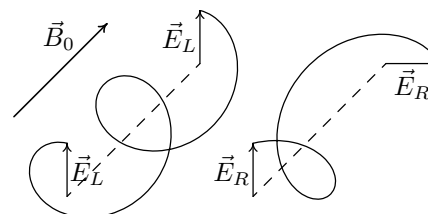
Z kapitoly 4.2 víme, že úhlová frekvence vlny se při vstupu vlny do jakéhokoli prostředí nezmění, a tak vektory \vec{E}_L a \vec{E}_R oběhnou za daný čas stejný počet otáček. V prostoru se ale pravotočivá vlna dostane dál než levotočivá, neboť $v_{fL} < v_{fR}$. Vektor \vec{E}_R tedy opisuje protáhlejší šroubovici než vektor \vec{E}_L .



obr. 69: Pootočení roviny polarizace

Plazma po čase končí a vlna se dostává zpět do izotropního prostředí, kde se obě části vlny šíří stejně rychle. Podívejme se na zjednodušující obrázek 70. Pomalejší levotočivé vlně se do délky plazmatu vešly celé dvě otáčky, pravotočivé pouze jedna a čtvrt. Za plazmatem vektory elektrických intenzit obou vln opět opisují stejně natažené šroubovice. Jejich složením vzniká lineárně polarizovaná vlna s rovinou polarizace odkloněnou o 45° od původního směru, obr. 69c a 69d.

Rovina polarizace vlny jdoucí rovnoběžně s magnetickým polem se při průchodu plazmatem stáčí. Kdybychom měli prostředí čtyřikrát delší oproti předchozímu příkladu, levotočivá vlna by stihla osm otáček a pravotočivá pět. Po průchodu by vektor \vec{E}_R ukazoval přímo nahoru jako \vec{E}_L a rovina polarizace by se ve výsledku nezměnila.



obr. 70: Odlišné šroubovice L-vlny a R-vlny v anizotropním prostředí

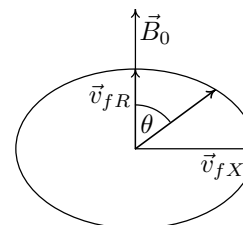
7.5 Vlny v libovolném směru

Pro popis elektromagnetické vlny šířící se obecným směrem v plazmatu s magnetickým polem jsou velmi důležité čtyři základní elektromagnetické vlny – řádná (značená O), mimořádná (X), pravotočivá (P) a levotočivá (L).

Bubliny

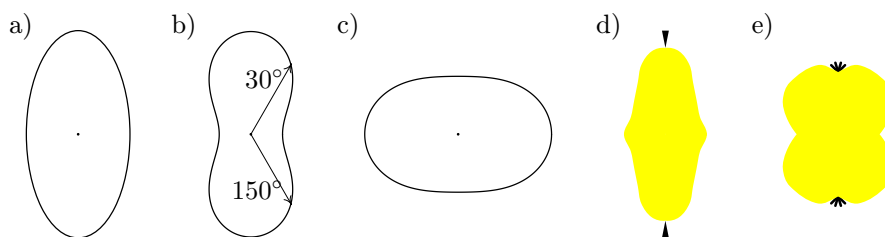
Mějme elektromagnetickou vlnu s takovou úhlovou frekvencí ω , se kterou se může naším plazmatem šířit pouze mimořádná vlna a pravotočivá. U řádné a levotočivé vlny spadá námi vybraná ω do zakázaného pásma. Předpokládejme ještě, že fázová rychlost pravotočivé vlny v_{fR} je v prostředí menší než fázová rychlost vlny mimořádné, $v_{fR} < v_{fX}$.

Vyšleme-li elektromagnetickou vlnu s ω pod obecným úhlem θ od vnějšího magnetického pole \vec{B}_0 , velikost její fázové rychlosti najdeme v diagramu z obrázku 71. Vzpomeňte si na kamarády



obr. 71: Diagram fázových rychlostí

běhající ve školce a křivku na obr. 22. Přesný tvar křivky („bubliny“) určuje prostředí a frekvence vlny. Další možné tvary bublin jsou na obr. 72a, 72b a 72c.



obr. 72: Možné tvary bublin

Vedle válcové symetrie bublin z výpočtů také plyne symetrie bublin podle roviny kolmé na osu z . Vlna šířící se pod úhlem 30° má vždy stejnou velikost fázové rychlosti jako vlna s $\theta = 150^\circ$. Proto křivkou popisující velikosti rychlostí nemůže být hruška (leđa podivná dvojstoppková nebo dvojbubáková z obrázků 72d a 72e).

Schematicky se bubliny zakreslují jako elipsy – neznamená to, že mají přesně eliptický tvar. Když elipsa stojí, rychlost v rovnoběžném směru s \vec{B}_0 je větší než v kolmém. V opačném případě elipsa leží – obr. 71, kde $v_{fR} < v_{fX}$.

Osmičky

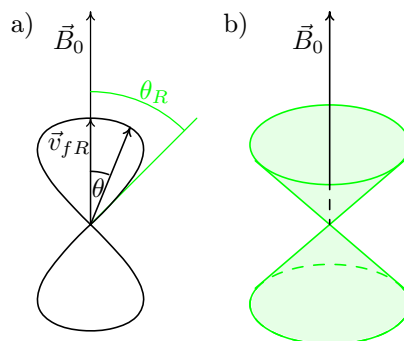
Tentokrát si vybereme takovou úhlovou frekvenci ω , která leží v zakázaném pásmu řádné, mimořádné i levotočivé vlny. Ze čtyř základních vln se pouze rovnoběžně s \vec{B}_0 může prostředím šířit pravotočivá vlna s fázovou rychlostí v_{fR} .

Pošleme-li vlnu o této úhlové frekvenci ω mírně šikmo vzhledem k magnetickému poli, vlna prostředím také bude procházet a její fázová rychlost bude obecně odlišná od v_{fR} . Pro více odkloněnou vlnu od magnetického pole se bude fázová rychlost vlny zmenšovat, obr. 73a.

Existuje úhel, kdy velikost fázové rychlosti klesne na nulu a nastane rezonance naší vlny s prostředím.

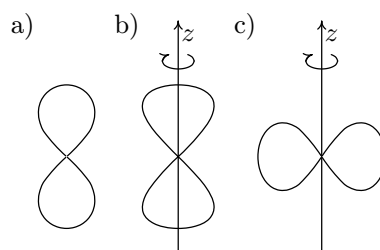
Tento úhel je v intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ jen jeden a nazývá se **rezonanční**. Vlna vyslaná pod větším úhlem než je rezonanční (až do 90°) se plazmatem nešíří.

V intervalu $(90^\circ, 180^\circ)$ také najdeme rezonanční úhel, který je díky symetrii podle roviny kolmé k \vec{B}_0 doplňkem do 180° k prvnímu rezonančnímu úhlu. Jelikož se pohybujeme v trojrozměrném prostředí, rezonanční směry v celém prostoru tak vytváří kuželovou plochu kolem osy z , jakou vidíme na obrázku 73b.



obr. 73: Diagram fázových rychlostí, rezonanční kužel

Diagram pro závislost velikosti fázové rychlosti v_{fR} na úhlu θ mezi směrem šíření vlny a magnetickým polem \vec{B}_0 pak vypadá jako osmička, obr. 74a. Prostorový diagram fázových rychlostí je zvláštní činka bez spojovací tyčky vzniklá otáčením osmičky kolem osy z , obr. 74b.



Kdybychom si zvolili úhlovou frekvenci ω , pro kterou by se mohla plazmatem šířit pouze mimořádná vlna (ve směru kolmém na \vec{B}_0), osmička by ležela, obr. 74c. Čím více by se směr šíření vlny přikláněl k magnetickému poli, úhel θ by se zmenšoval a tím by také klesala fázová rychlost vlny. V jistém momentě by dosáhla nuly. Pro menší úhly θ by se plazmatem nešířilo nic. Diagram velikostí fázových rychlostí v prostoru by vypadal jako podivná pneumatiku z obrázku 74c vzniklá otáčením ležící osmičky kolem z .

obr. 74: Možné tvary osmiček

Vlnové módy

Bublina z obrázku 71 (vzniklá z v_{fR} a v_{fX}) popisuje chování jedné vlny o dané frekvenci, když ji vyšleme pod různými úhly vzhledem k vnějšímu magnetickému poli. Šířeli se tato vlna přesně v rovnoběžném směru s \vec{B}_0 , je to vlna čistě pravotočivá s fázovou rychlostí v_{fR} . Ve směru kolmém na \vec{B}_0 půjde o vlnu mimořádnou s v_{fX} . Když vyšleme tuto vlnu pod obecným úhlem θ , až složitější výpočet by nám řekl, jak vlna přesně vypadá, neboli jak „běhá“ vektor její elektrické intenzity. Naše vlna nepůjde jednoduše rozložit na pravotočivou a mimořádnou složku, chová se složitěji.

Přestože se s úhlem θ mění „vnitřek“ naší vlny, stále jde o stejný typ, neboli o tentýž **vlnový mód**. Jednotlivé módy značíme podle toho, jak vypadají v rovnoběžném a kolmém směru vzhledem k vnějšímu magnetickému poli.

Bublina může charakterizovat čtyři různé vlnové módy, R-X, R-O, L-X a L-O. Případ pravotočivomimořádného módu R-X jsme si rozebrali, ostatní jsou analogické. Ve dvojici vln jednoho vlnového módu je tedy vždy jedna základní vlna z rovnoběžného směru s \vec{B}_0 a druhá ze směru kolmého k \vec{B}_0 . Vlnový mód O-X ani R-L nedává smysl.

Je-li diagramem stojící osmička, pak jde buď o R nebo L mód. Kolmo na magnetické pole se taková vlna nešíří, zaniká při rezonančním úhlu. Je-li diagramem ležatá osmička, prostředím se šíří řádný nebo mimořádný mód. Osmičkovému diagramu přísluší pouze jedna základní vlna, R, L, O nebo X.

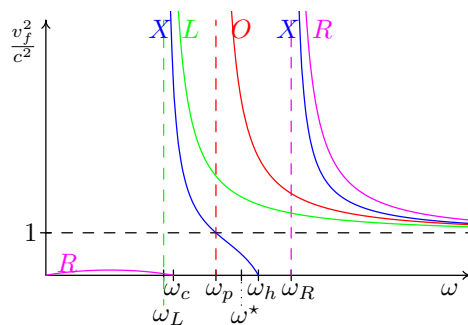
Vlastnosti módů

Nyní si uvedeme některé důležité závěry, které vyplývají z výpočtů elektromagnetických vln v plazmatu s vnějším magnetickým polem.

Omezíme se na vlny o jediné, avšak libovolné, úhlové frekvenci ω . Každým plazmatem se touto ω mohou šířit maximálně dva různé vlnové módy (žádný, jeden nebo dva). Pokud se šíří módy dva, velikosti jejich fázových rychlostí v_{f1} a v_{f2} jsou v každém směru navzájem odlišné; neboli neexistuje úhel θ , při kterém by platilo $v_{f1} = v_{f2}$.

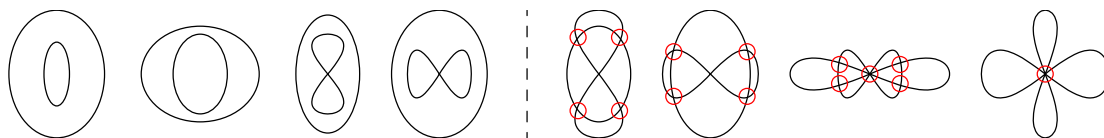
Vlnový mód se může objevit nebo zaniknout pouze na význačné úhlové frekvence ω_c , ω_p , ω_R , ω_L nebo ω_h , kde má některá ze základních vln mezní frekvenci nebo rezonanci. Například zaniká-li na ω_p řádná vlna, musí zde zaniknout i L-O mód.

Výše uvedené vlastnosti si můžeme alespoň zčásti ověřit na obrázku 75, kde jsou disperzní relace všech čtyř základních vln v jediném grafu¹². Vidíme, že jednotlivé vlny vznikají nebo zanikají pouze na význačných úhlových frekvencích. Žádné dvě křivky se nikde neprotínají, a tak vzájemné vztahy fázových rychlostí se v jednotlivých intervalech zachovávají. Například pro úhlovou frekvenci ω^* platí $v_{fX}^* < v_{fL}^* < v_{fO}^*$ a tento vztah platí také pro všechny úhlové frekvence z intervalu (ω_p, ω_h) .



obr. 75: Disperzní relace základních vln (pro případ $\omega_L < \omega_c < \omega_p$)

Jelikož se křivky jednotlivých vln neprotínou, nikdy nenastane rovnost fázových rychlostí dvou různých vln se stejnou ω . (Přesto u vysokých frekvencí uvažujeme fázovou rychlost všech vln rovnu c .)



obr. 76: Některé povolené a zakázané kombinace dvou módů

Důsledek: Schematickým diagramem, který popisuje rychlosti vlnových módů o dané úhlové frekvenci ω , může být: elipsa, osmička, dvě elipsy (jedna uvnitř druhé), osmička s elipsou (osma uvnitř) a nebo nic pro případ, kdy se prostředím s ω žádný mód nešíří. Ostatní varianty jsou zakázané, protože mají průsečík – dva různé módy by pak měly při nějakém úhlu θ stejnou fázovou rychlost, červeně označeno na obrázku 76. Více než dvě křivky také nejsou možné, neboť o stejné frekvenci se prostředím mohou šířit maximálně dva módy.

¹²Graf popisuje prostředí, kde $\omega_L < \omega_c < \omega_p$. Jednotlivé možnosti si více popíšeme v kapitole 7.6

7.6 Vytvoření CMA-diagramu

Graf, který nyní vytvoříme, popisuje chování všech vln v plazmatu s magnetickým polem. Tepelný (chaotický) pohyb částic prostředí zanedbáme. Volné elektrony se tedy pohybují pouze v důsledku působení nějakých polí. Hmotnost iontů oproti hmotnosti elektronů budeme brát za nekonečně velkou, a tak působící elektrické pole vlny s ionty nepohne.

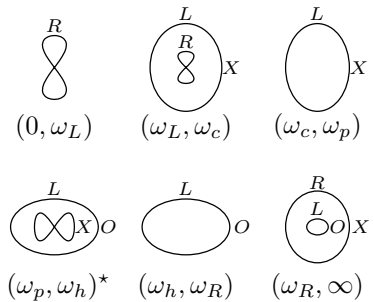
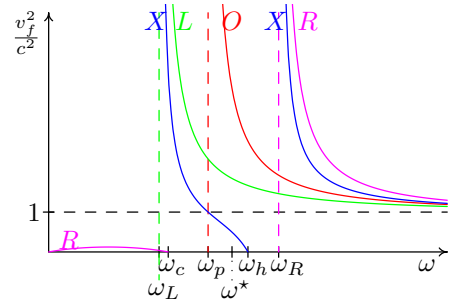
Z disperzních relací bubliny a osmičky

Vyjdeme z grafu disperzních relací čtyř základních vln na obrázku 77 nahoře a zaměříme se na vlny s ω^* . S touto úhlovou frekvencí se naším prostředím může šířit řádná, mimořádná a levotočivá vlna. Pro tři základní vlny potřebujeme osmičku a okolo ní bublinu (osma pro jednu vlnu a bublina pro dvě). Osmička musí ležet, protože v kolmém směru máme vlny dvě (O a X). Z důvodu $v_{fX} < v_{fO}$ osmička charakterizuje X mód.

Na bublinu zbyla levotočivá a řádná vlna (L-O mód) a jelikož $v_{fL} < v_{fO}$, bublina je položená, obr. 77 vlevo dole.

Ležatá bublina s ležatou osmičkou charakterizují nejen vlny o úhlové frekvenci ω^* , ale všechny vlny z intervalu $(\omega_p, \omega_h)^{13}$. Podobným způsobem se vytvoří schematické diagramy fázových rychlostí v každém ze šesti intervalů $(0, \omega_L)$ až (ω_R, ∞) .

V dalších kapitolách se budeme zabývat hlavně R-módem z intervalu nízkých úhlových frekvencí $(0, \omega_L)$.



obr. 77: Diagramy fázových rychlostí vytvořené z disperzních relací (pro případ $\omega_L < \omega_c < \omega_p$)

Osy CMA-diagramu

CMA-diagram¹⁴ tvoří jakýsi rám pro grafy fázových rychlostí jednotlivých vlnových módů. Nejdříve si popíšeme jeho trochu nezvyklé osy.

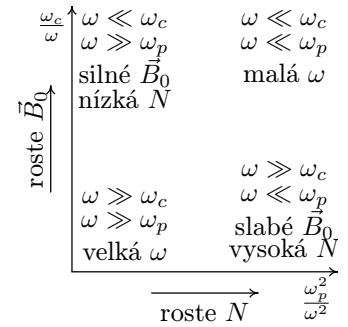
¹³Přesný tvar bubliny a osmičky se v průběhu intervalu mění. Bubliny se mohou různě nafukovat, osmičky mohou být více či méně baňaté. „Schematické zakreslení“ ale platí pro celý interval.

¹⁴Zkratka CMA je vytvořena z počátečních písmen jmen fyziků Clemmow, Mullaly, a Allis.

Na vodorovnou osu se nanáší podíl druhé mocniny plazmové frekvence ku druhé mocnině úhlové frekvence vlny, $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$. Z rovnosti (41) $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$ je zřejmé, že hodnota ω_p^2 je přímo úměrná hustotě plazmatu N . Omezíme-li se tedy na vlny o jediné úhlové frekvenci ω , tak růst vodorovné souřadnice odpovídá plazmatu s větším množstvím nabitých částic v 1 cm^3 . Naopak, zvolíme-li si plazma s danou hustotou plazmatu N , ω_p se nemění. Potom zvyšující se vodorovná souřadnice odpovídá vlnám s nižší frekvencí (ω je ve jmenovateli zlomku $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$). Hodnoty na vodorovné ose nemají jednotku, jsou bezrozměrné, $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \approx \frac{s^{-2}}{s^{-2}}$.

Na svislou osu CMA-diagramu nanášíme poměr cyklotronové frekvence a úhlové frekvence vlny $\frac{\omega_c}{\omega}$. Hodnota ω_c je přímo úměrná velikosti vnějšího magnetického pole, vztah (49) $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$. Při pevné ω tak rostoucí svislá souřadnice odpovídá prostředí se silnějším magnetickým polem \vec{B}_0 . Omezíme-li se na jediné magnetické pole \vec{B}_0 , pak větší svislé souřadnice popisují vlny s menší frekvencí (i zde je ω ve jmenovateli zlomku $\frac{\omega_c}{\omega}$). Hodnoty na svislé ose jsou podobně jako na vodorovné bez jednotky.

Jinými slovy: V levém dolním rohu jsou vlny s vysokou úhlovou frekvencí, v protějším pravém horním naopak s nízkou. Pravý dolní roh odpovídá velmi hustému plazmatu, levý horní prostředí se silným vnějším magnetickým polem, obr. 78.



obr. 78: Osy a krajní případy CMA-diagramu

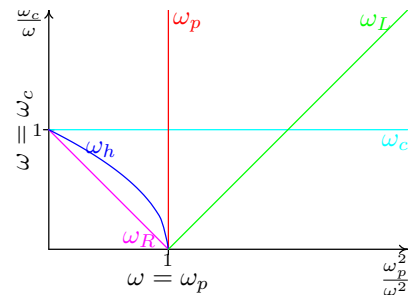
Hranice v CMA-diagramu

Barevné hranice v CMA-diagramu z obrázku 79 odpovídají význačným hodnotám úhlové frekvence, ω_p , ω_c , ω_L , ω_R a ω_h .

Červená hranice v CMA-diagramu odpovídá vlnám s úhlovou frekvencí rovnou plazmové frekvenci prostředí, $\omega = \omega_p$. Na vodorovné ose v CMA-diagramu přímka prochází jedničkou. Se svislou osou je hranice rovnoběžná, protože hodnota ω_p nezávisí na vnějším magnetickém poli a tudíž ani na hodnotě ω_c .

Podobně tyrkysová hranice. Ta prochází všemi body CMA-diagramu, kde je úhlová frekvence vlny rovna cyklotronové frekvenci, $\omega = \omega_c$. Na svislé ose protíná jedničku a je rovnoběžná s vodorovnou osou – hodnota ω_c není plazmatem ovlivněna, jen velikostí magnetického pole \vec{B}_0 .

Hodnoty ω_R , ω_L a ω_h jsou závislé na hustotě plazmatu N i velikosti \vec{B}_0 (na ω_p i ω_c). Hranice jimi vytvořené jsou křivky, jejichž přesný tvar je určen vzorci, které



obr. 79: Hranice CMA-diagramu

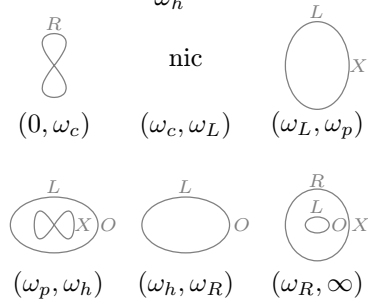
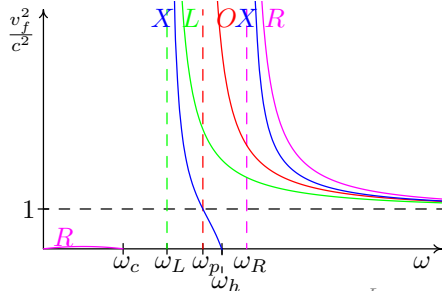
jsme si ukazovali jen pod čarou v zápatí. (Modrou hranici tvoří část paraboly, růžová a zelená čára jsou části přímek.)

Oblasti v CMA-diagramu

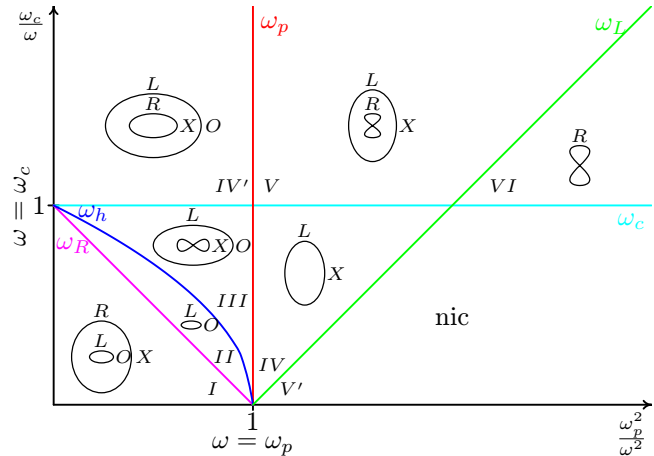
Jednotlivé oblasti CMA-diagramu odpovídají intervalům úhlových frekvencí z obrázku 77. Každému poli tak přísluší jeden diagram vlnových módů (diagram se může změnit pouze na hranici).

Podívejme se na úzkou oblast označenou *II* v obrázku 80. Toto pole odpovídá intervalu (ω_h, ω_R) na grafu 77, kde se šíří L-O mód s $v_{fL} < v_{fO}$. Oblast i interval jsou ohraničené hodnotami ω_h a ω_R . Pohybujeme-li se od nízké modré ω_h k vyšší růžové ω_R , bublina se zmenšuje – hodnoty v_{fL} a v_{fO} v grafu 77 klesají.

Překročíme-li růžovou hranici ω_R v grafu 77 i v CMA-digramu, objeví se okolo L-O bubliny druhá obrovská bublina popisující mód R-X. Růžová hodnota ω_R je mezní frekvencí řádné a pravotočivé vlny, a tedy $v_{fR} \rightarrow \infty$, $v_{fX} \rightarrow \infty$. Dále s rostoucí ω se obě bubliny zmenšují, pro velmi vysoké ω se z nich skoro stanou kružnice s poloměrem c .



obr. 81: Grafy pro případ $\omega_c < \omega_L$



obr. 80: CMA-diagram

Podobným způsobem můžeme pomocí obrázku 77 namalovat diagramy fázových rychlostí příslušné šesti intervalům do šesti oblastí CMA-diagramu (označených *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* a *VI*). Pole *IV'* a *V'* zůstanou nezaplňená.

Graf 77, ze kterého jsme vyplnili část CMA-diagramu, popisuje situaci, kdy ω_L je nejmenší ze všech pěti významných úhlových frekvencí. Při vhodné volbě prostředí – velmi slabé pole \vec{B}_0 v hustším plazmatu – se stane, že hodnota ω_L převyšuje ω_c . Graf fázových rychlostí pro takový případ je na obrázku 81. Všimněme si, že křivky jednotlivých základních vln se vůči významným ω chovají stejně (například mimořádná vlna má stále mezní frekvence na ω_L a ω_R a rezonanci na ω_h). Změna

je pouze v pořadí těchto hodnot.

Oproti grafu 77 se graf 81 liší jen ve druhém intervalu (ω_c, ω_L) namísto (ω_L, ω_c) . Tímto intervalem neprochází funkce žádné ze základních vln, a tak se žádný vlnový mód prostředím nešíří – plazma je příliš husté (vysoká ω_p) a magnetické pole příliš slabé (nízká ω_c). Políčko V' v CMA-diagramu bude prázdné.

Zbývá vyplnit poslední oblast označenou IV' . Doposud jsme předpokládali prostředí „hustšího plazmatu se slabším magnetickým polem“, přesněji prostředí, kde $\omega_p > \omega_c$. Existuje samozřejmě prostředí, ve kterém platí opačná nerovnost $\omega_p < \omega_c$ (neboli „řidší plazma se silnějším magnetickým polem“).

Graf disperzních relací pro případ $\omega_p < \omega_c$ je na obrázku 82. Všimněme si opět, vztahy funkcí jsou vůči význačným hodnotám ω stále stejné, změnilo se pořadí hodnot. Oproti grafu 77 se graf 82 liší pouze ve třetím intervalu (ω_p, ω_c) namísto (ω_c, ω_p) . Vidíme, že intervalem (ω_p, ω_c) prochází všechny funkce základních vln. Prostředím se tedy mohou šířit dva vlnové módy (R-X a L-O), jejich fázové rychlosti popisují dvě bubliny, černě na obrázku 82, šedě jsou stejné jako na 77.

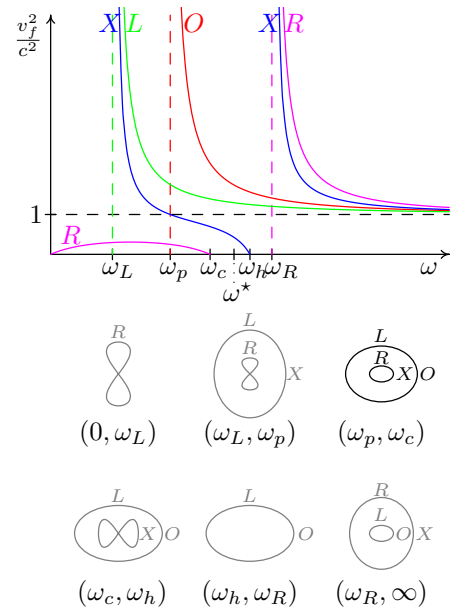
Zaměříme se nyní na úhlovou frekvenci ω^* . Posunujeme-li se od ω^* k nižším úhlovým frekvencím, v grafu 77 narazíme na ω_p . V CMA-diagramu tomu odpovídá překročení červené hranice z oblasti III do oblasti IV . Pohybujeme-li se stejně v grafu 82, nejdříve dojdeme k hodnotě ω_c , v CMA-diagramu se tak přes tyrkysovou hranici ω_c dostáváme do oblasti IV' .

Cesta I, II, III, IV, V, VI CMA-diagramem odpovídá posouvání ω od obrovských hodnot až k nule v grafu 77. Jsme-li v grafu 81 (husté plazma, slabé \vec{B}_0), namísto políčka V cesta obsahuje V' . Máme-li naopak řídké plazma se silnějším magnetickým polem, které popisuje 82, CMA-diagramem projdeme přes oblast IV' .

CMA-diagram zachycuje chování všech vln ve všech možných prostředích.

7.7 Složitější CMA-diagram

Při tvorbě CMA-diagramu v předchozí kapitole jsme uvažovali nejjednodušší model plazmatického prostředí – studené plazma s nehybnými ionty. Připustíme-li pohyb iontů, disperzní relace základních vln se zesložití (například o změně u levotočivé vlny jsme se už zmínili). V grafech se vedle dosavadních význačných úhlových frek-



obr. 82: Grafy pro případ $\omega_p < \omega_c$

vencí objeví nové a ty v CMA-diagramu vytvoří další hranice. CMA-diagram se tak rozšíří.

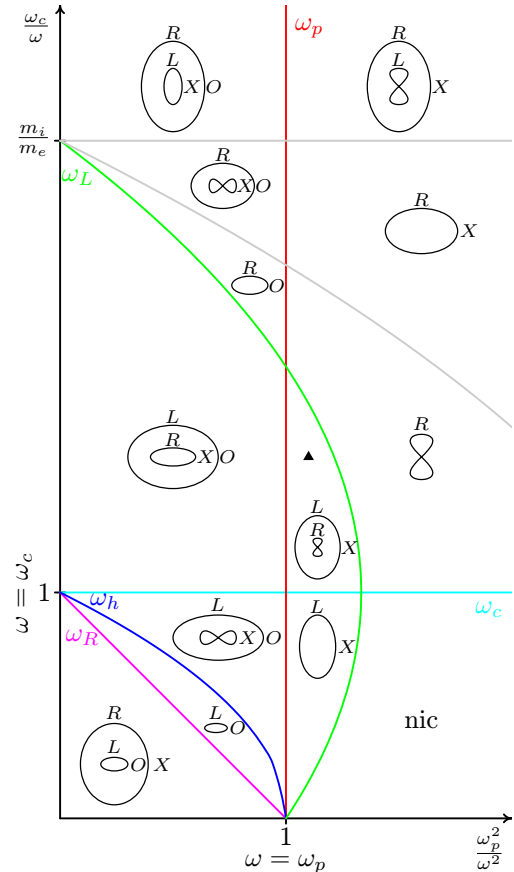
Na obrázku 83 takový rozšířený CMA-diagram vidíme. Z dosavadních barevných hranic se změnila jen zelená – zahrnula a protíná svislou osu v bodě daném poměrem hmotností iontu a elektronu (u vodíkového plazmatu je poměr 1840). Dále přibyly dvě šedé hranice a počet oblastí vzrostl na třináct.

Uvažujeme-li plazma s dvěma typy pohyblivých kladných iontů, třeba s vodíkem H^+ a kyslíkem O^+ , příslušný CMA-diagram se ještě rozšíří. Například k cyklotronovým frekvencím elektronů a vodíkových iontů přibude cyklotronová frekvence kyslíku. Odpovídající CMA-diagram obsahuje ještě více hranic a ještě více oblastí. Takový graf se stává příliš nepřehledným.

Použití CMA-diagramu

Nejdříve si zvolíme prostředí, tzn. hustotu plazmatu N a velikost vnějšího magnetického pole $|\vec{B}_0|$. Dle vztahů (41) $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$ a (49) $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$ spočítáme hodnoty plazmové a cyklotronové frekvence, ω_p a ω_c . Nyní si zvolíme úhlovou frekvenci ω zkoumané vlny. Vypočítáme vodorovnou $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ a svislou souřadnici $\frac{\omega_c}{\omega}$ vlny v CMA-diagramu. Obrázek v políčku, do kterého bod o těchto souřadnicích padne, popisuje chování naší vlny v prostředí, které jsme si zadali. (Pokud bod padne přímo na nějakou hranici, trefili jsme se do mezní frekvence nebo rezonance nějaké vlny.)

Například padne-li naše vlna do CMA-diagramu na místo černého trojúhelníčku, hned vidíme, že ve směru rovnoběžném s magnetickým polem \vec{B}_0 se vlna rozdělí na pravotočivou a levotočivou část. Levotočivá se bude šířit větší fázovou rychlostí. Když budeme vlnu od magnetického pole odklánět, pravotočivá vymizí, prostředím se už nemůže šířit. Levotočivá vlna se bude postupně přeměňovat na mimořádnou, která má menší fázovou rychlost než levotočivá.



obr. 83: CMA-diagram