

Metodika pro výuku kvantové fyziky na SŠ

Kvantová fyzika je velmi abstraktní oblast fyziky, která se vymyká naší intuici a zkušenostem z běžného života. Tento metodický materiál nabízí cestu, jak kvantovou fyziku na střední škole vyučovat bez složitého matematického popisu, se zaměřením na porozumění jejím základním principům. Jeho cílem je vzbudit zájem i o nová témata jako je kvantová kryptografie nebo kvantové počítání. Navržená výuka je založena na aktivní práci studentů s názornými pomůckami, spolupráci ve skupinách a diskusi o odlišnostech kvantového světa a je cílená na běžnou třídu, ne pouze na několik zájemců o kvantovou fyziku.

Výukový plán je rozdělen do pěti na sobě nezávislých modulů. Každý modul představuje ucelený výukový blok zaměřený na určité téma, jeho délka (počet vyučovacích hodin) je uvedena v závorce. Podle časových možností a preferencí učitele lze moduly různě kombinovat, zařadit jen některé z nich, případně vybrat pouze určité aktivity.

Přehled modulů

Modul 1: Kvantování energie (2 h)

Modul 1 je zaměřený na experimenty vedoucí ke kvantové fyzice a poskytuje přirozený způsob, jak studentům kvantovou fyziku představit v jejím historickém kontextu. Soustředí se na dva jevy: fotoelektrický jev a čarová spektra atomů.

Modul 2: Základní principy kvantové fyziky (3 h)

K základním principům kvantové fyziky, které ji odlišují od fyziky klasické, patří její pravděpodobnostní charakter, vlastnosti kvantového měření a princip superpozice. Tyto principy jsou studentům představeny pomocí her a aktivit (kvantové piškvorky, kvantové lodě), což umožňuje o nich mluvit bez použití složité matematiky. Tyto principy jsou dále propojeny s vlnově-částicovým dualismem, protože právě pomocí nich je vysvětleno vlnové a částicové chování elektronů ve dvojštěrbinovém experimentu. Na závěr je možné nastínit, jak využívají principu superpozice kvantové počítače a jak se zde projevují vlastnosti kvantového měření. Do výuky jsou zařazeny otázky ověřující konceptuální porozumění a stimulující diskusi o probírané látce.

Modul 3: Nekompatibilní veličiny (1h)

Nekompatibilní veličiny jsou veličiny, jejichž hodnota nemůže být přesně dána současně. Jde o další vlastnost objektů mikrosvěta, která nemá v našem světě obdoby. Jeden konkrétní příklad nekompatibilních veličin uvádějí Heisenbergovy relace neurčitosti: polohu a hybnost částice. Zde je tento princip představen obecněji pomocí dalších veličin s podobnými vlastnostmi, jako je např. polarizace fotonů. Tento obecnější přístup umožňuje ukázat studentům pravděpodobnostní charakter kvantového měření a skutečnost, že kvantové měření není pasivním procesem, ale ovlivňuje stav měřeného systému. Umožňuje také přiblížit kvantovou kryptografii, které je věnován modul 4.

Modul 4: Kvantové šifrování (BB84 protokol) (1 h)

Cílem modulu je přiblížit studentům kvantovou kryptografii na příkladu protokolu BB84. Jde o způsob bezpečného předání šifrovacího klíče pomocí polarizovaných fotonů. Modul je možné

zařadit samostatně, nebo v návaznosti na modul 3 věnovaný nekompatibilním veličinám. Podle toho se liší způsob výkladu, který je dále uveden v obou variantách.

Modul 5: Kvantově mechanický model atomu (1–2 h)

Kvantově-mechanický model je v současné době nejdokonalejším modelem atomu. Opírá se o pravděpodobnostní popis kvantového světa a využívá hustotu pravděpodobnosti nalezení elektronu v atomu. Hustota pravděpodobnosti je rozdělena na dvě části – úhlovou část a část závislou na vzdálenosti od jádra. Každá část je znázorněna jiným typem grafu – polárním (nebo od něj odvozeným „paprskovým“) grafem a kartézským grafem. Informace z obou grafů studenti spojují a zakreslují celkovou hustotu pravděpodobnosti pro jednotlivé stavy elektronu v atomu vodíku a seznamují se tak s tvarem orbitalů atomu vodíku.

Pokud modul zařazujeme samostatně, zabere dvě vyučovací hodiny, pokud předcházela aktivita „kvantové lodě“ z modulu 2, na niž lze navázat při výkladu hustoty pravděpodobnosti, stačí jedna vyučovací hodina.

Podrobný popis modulů

Následující stránky obsahují metodické materiály k jednotlivým modulům. Na začátku jsou uvedeny hlavní výukové cíle, k nimž modul směřuje a odhad časování jednotlivých hodin. Následuje metodický komentář k výuce spolu s popisem jednotlivých aktivit a seznam potřebných pomůcek. Na konci modulu jsou uvedeny jeho možné modifikace a možnosti kombinování s jinými moduly.

Metodika dále obsahuje pracovní listy pro studenty (v přílohách na konci) a prezentace k modulům M1, M2 a M5 (dostupné na TOBEADED). Návod pro výrobu pomůcek bude doplněn.

Seznam pracovních listů:

- M1: Energetické hladiny atomu vodíku
- M2: Dvojštěrbínový experiment
- M3: Nekompatibilní veličiny
- M4: Kvantová kryptografie (varianta s kvantovou kartou)
- M4: Kvantová kryptografie (varianta s polarizací fotonů)
- M5: Kvantově-mechanický model atomu

Seznam prezentací:

- M1: Kvantování energie
- M2: Základní principy kvantové fyziky
- M5: Kvantově-mechanický model atomu

Modul 1: Kvantování energie

Tento modul představuje kvantovou fyziku v jejím historickém kontextu a zaměřuje se na dva jevy vedoucí ke vzniku kvantové teorie: fotoelektrický jev a čarová spektra atomů.

Výklad je navržen tak, aby zachoval klíčové myšlenky týkající se kvantování energie, ale přitom byl realizovatelný za dvě vyučovací hodiny včetně praktických ukázek. Proto klade důraz na kvalitativní vysvětlení podstaty experimentů a jejich rozporu s vlnovou teorií světla. Výpočty (energie a vlnové délky fotonu, převod hodnoty energie z joulů na elektronvolty) jsou do hodin zařazeny také, ale nejsou hlavní náplní. Pro zařazení tohoto modulu je potřeba, aby studenti měli základní povědomí o vlnové povaze elektromagnetického záření¹ a znali pojmy vlnová délka, frekvence a vztah mezi nimi.

1.1 Cíle:

- Student uvede vlastnosti fotoelektrického jevu, které nelze uspokojivě vysvětlit pomocí vlnového popisu světla, a uvede jejich vysvětlení pomocí kvantování energie světla (tj. pomocí fotonů).
- Student popíše, proč jsou čarová spektra atomů neslučitelná s vlnovým popisem světla a uvede jejich vysvětlení pomocí kvantování energie elektronů v atomu.

1.2 Časový plán:

Modul 1 – hodina 1/2		Čas
Úvod	• motivace a historicko-filosofický úvod do kvantové fyziky	10 min
Co je světlo?	• diskuse ve skupinách • společné shrnutí • ukázka vlnových vlastností světla	5 min
Fotoelektrický jev	• popis experimentu • demonstrační experiment s plechovkou	20 min
Výpočet energie fotonu	• využití vztahu $E = hf$ • převod J $\rightarrow$ eV	5 min
Praktické využití fotoelektrického jevu	• diskuse s celou třídou, kde se setkáme se zařízeními využívajícími fotoelektrický jev • shrnutí	5 min

¹Pojmy *elektromagnetické záření* a *světlo* zde chápeme jako synonyma.

Modul 1 – hodina 2/2		Čas
Úvod	• opakování fotoelektrického jevu	5 min
Pozorování emisního spektra vodíku	• pozorování spekter přes difrakční mřížku: spojité sluneční spektrum vs. čárové spektrum vodíkové výbojky • změření vlnových délek spektrometrem	10 min
Kvantová hypotéza	• myšlenka kvantování energie fotonů, $E = hf$ • výpočet energie fotonu červeného světla	10 min
Energetické hladiny atomu	• zavedení povolených energetických hladin – elektron v atomu nemůže mít libovolnou energii	10 min
Aktivita s tyčkami	• skupinová práce s tyčkami znázorňujícími spektrum atomu vodíku podle pracovního listu • společné shrnutí výsledků pracovního listu	10 min

1.3 Pomůcky:

- Dvojštěrbina, laserové ukazovátko
- Sada pro demonstraci fotoelektrického jevu s plechovkou
- Výbojová trubice s vodíkem a zdroj napětí
- Difrakční mřížky nebo difrakční brýle pro studenty
- (Optické vlákno a spektrometr)
- Demonstrační tyčky pro znázornění energetických hladin
- Tyčky a schémata energetických hladin pro každou skupinu
- Pracovní list *Energetické hladiny atomu vodíku* pro každého studenta

1.4 Průběh výuky:

1. hodina: Kvantování energie světla

Historicko-filosofický úvod do kvantové fyziky

Cílem úvodního výkladu je zasadit kvantovou fyziku do historického-filosofického kontextu, upozornit na některé její odlišnosti od klasické fyziky, zdůraznit význam experimentu a uvést některé její aplikace. Tato část je míněna jako motivační, nejde o podrobný výklad historie ani principů všech níže zmíněných aplikací, proto je jí věnován jen krátký čas (cca 10 minut). Níže je nastíněno několik bodů, které můžeme v úvodu zmínit. Výklad lze doplnit citáty významných fyziků, které jsou pro studenty motivační, protože přinášejí lidský pohled na fyziku jako vědu.

Nová fyzika mimo naši představivost Budeme zkoumat oblast fyziky, která se zabývá mikrosvětlem - malými objekty na úrovni atomů a molekul. Uvidíme, že se vymyká naší běžné zkušenosti a intuici. Proto bude mnohem důležitější, jestli máme dost velkou představivost na

to, abychom přijali tuto novou teorii s jejími podivuhodnými pravidly, než to, co už z fyziky umíme. Tuto myšlenku přináší Einsteinův citát z r. 1931 [10].

Imagination is more important than knowledge. [...] It embraces the entire world, and all there ever will be to know and understand. (Albert Einstein)

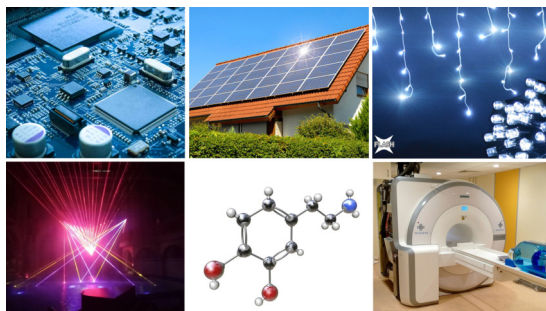
Představitivost je důležitější než vědění. [...] Zahrnuje celý svět a vše, co kdy bude možno poznat a pochopit. (Albert Einstein, volný překlad)

Experiment jako kritérium platnosti teorie Na rozdíl od klasické fyziky, kde se můžeme řídit naší smyslovou zkušeností se světem kolem nás, nemáme při zkoumání mikrosvěta k dispozici nic jiného, než výsledky experimentů. Musíme proto s mnohem větším důrazem než v jakékoli jiné oblasti fyziky naši teorii budovat tak, aby souhlasila s experimentem, i když se nám bude zdát podivná. Známkou, že je kvantová fyzika zatím úspěšnou teorií, je skutečnost, že její předpovědi souhlasí s experimenty s vysokou přesností. (Jako příklad shody teoretické předpovědi s experimentem lze pro zvědavé studenty uvést např. magnetický moment elektronu, u něž je shoda výpočtu a měření na více než 10 desetinných míst. Jde o veličinu, která říká, „jak silným magnetem je elektron.“) Richard Feynman upozorňuje na neintuitivnost kvantové fyziky těmito slovy² [14]:

Quantum physics describes Nature as absurd from the point of view of common sense. And it fully agrees with experiment. So, I hope you can accept Nature as She is - absurd. (Richard Feynman)

Kvantová fyzika popisuje Přírodu z hlediska zdravého rozumu jako absurdní, a přesto je zcela ve shodě s experimentem. Doufám tedy, že dokážete přijmout Přírodu takovou, jaká je – absurdní. (Richard Feynman, volný překlad)

Motivace – k čemu to je? Principy kvantové fyziky využívá spousta zařízení, která využíváme v běžném životě: fotovoltaika, LED, LASER, mnohá zařízení v medicíně (magnetická rezonance, pozitronová emisní tomografie, ...). Miniaturizace mikročipů v počítačích a mobilních telefonech nás již řadu let nutí brát v úvahu, že i zde mohou nastávat kvantové jevy (např. tunelování elektronů). Díky kvantové fyzice umíme vysvětlit strukturu a stabilitu atomů, chemickou vazbu a stavbu molekul. Dnes díky ní vznikají také kvantové počítače, rozvíjí se kvantové šifrování atd. Pokusíme se tedy porozumět jejím základům.



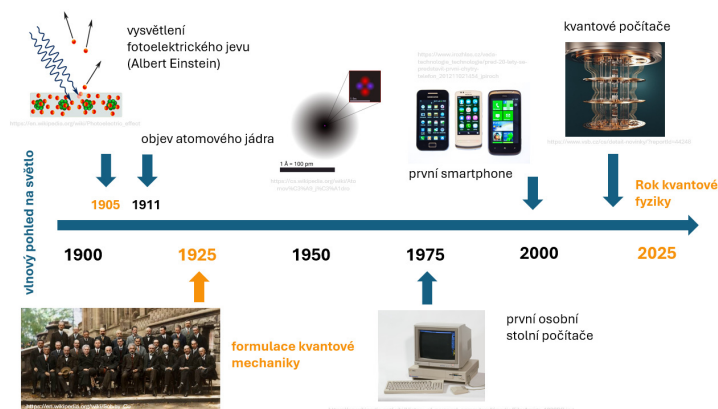
Obr. 1.1: Snímek prezentace s příklady aplikací kvantové fyziky

Historické okénko – kdy to celé začalo Kvantová fyzika vznikla na začátku 20. století jako úplně přelomová teorie vymykající se běžné zkušenosti a dosavadním představám o světě. Na konci 19. století byla fyzika vnímána jako „téměř hotová teorie“, která popisuje přírodní jevy

²V originálním znění je místo „kvantové fyziky“ použita „kvantová elektrodynamika“. Zde pro jednoduchost mezi jednotlivými oblastmi kvantové fyziky nerozlišujeme.

(Newtonova mechanika – pohyb těles, elektrodynamika – elektrické a magnetické pole, termika – tepelné jevy, optika – světlo a jeho vlastnosti, ...). Problém dělalo několik nevysvětlených experimentů – studentům ukážeme dva z nich, které se týkají světla. Pomocí klasické fyziky se je nepodařilo vysvětlit, takže odstartovaly vznik nové teorie, která byla formulována kolem roku 1925. Společným jmenovatelem těchto problémů je otázka, co je vlastně světlo.

Pro ilustraci historického kontextu můžeme využít časovou osu, která zachycuje milníky ve vývoji kvantové fyziky od vysvětlení fotoelektrického jevu přes její formální zavedení mezi lety 1925–1927, které bylo předmětem Solvayské konference v roce 1927. Pro studenty je motivační, že se na dobové fotografii z této konference vyskytují „samá známá jména“. Do časové osy můžeme přidat i další události dle vlastního uvážení.



Obr. 1.2: Snímek prezentace s časovou osou vývoje kvantové fyziky

Co je světlo?

V krátké aktivitě ve dvojicích či malých skupinkách studenti ve 3–4 větách co nejpřesněji napíší, co je podle nich světlo. Na vymýšlení dostanou jen velmi krátký čas (cca 2 min), následuje společné shrnutí.

Cílem tohoto krátkého úkolu je aktivizace studentů a propojení nové látky s předchozími znalostmi o světle. Studenti si při aktivitě uvědomí, že není snadné jednoduše říct, co je to světlo. Zařazení aktivity může mít velmi pozitivní vliv na pracovní atmosféru v hodině, i když se může zdát, že zdánlivě nepřináší nové znalosti. Mezi typickými odpověďmi studentů se může objevit nejen popis „co je světlo“, ale také popis jeho vlastností, např.:

- elektromagnetické vlnění
- příčné vlnění
- má různé vlnové délky (viditelné i okem neviditelné světlo)
- šíří se konečnou rychlostí c
- proud fotonů

V rámci společného shrnutí zdůrazníme či uvedeme dvě vlnové vlastnosti světla, které budou dále využity při vysvětlení fotoelektrického jevu a čárových spekter atomů.

- Vlnění se řídí zákony lomu a odrazu, interferuje při průchodu štěrbinami. (Interferenci můžeme krátce připomenout pomocí dvou jednoduchých experimentů: videa interference vln na vodní hladině a zobrazení interferenčního obrazce na stěnu pomocí laserového ukazovátka, které jsou podrobněji popsány v modulu 2 v sekci 2.4).

- Vlna dopadající na rozhraní přináší energii zároveň na celou plochu dopadu (ne pouze do jednoho bodu, jak uvidíme později u klasických částic). Jako analogii lze uvést zvukové vlny dopadající na zeď nebo mořské vlny narážející na pobřeží.

Fotoelektrický jev

Část věnovaná fotoelektrickému jevu je koncipovaná na 30 minut, aby spolu s úvodní částí tvořila jednu vyučovací hodinu. Je založena na demonstračním experimentu fotoelektrického jevu pomocí plechovky a jeho kvalitativním vysvětlení. Výpočty jsou z časových důvodů omezeny. Ačkoli se fotoelektrický jev rozlišuje na vnitřní a vnější, výklad je veden pouze pro vnější fotoelektrický jev, protože je pro studenty představitelnější a lze jej vizualizovat pomocí níže popsaného apletu. Fotoelektrickému jevu se lze samozřejmě věnovat mnohem obsírněji než je uvedeno v tomto materiálu, který se snaží nabídnout minimalistický přístup, ale při tom zachovat důležité myšlenky potřebné pro následné budování základních principů kvantové fyziky. Podrobnější rozbor fotoelektrického jevu a historické souvislosti jsou uvedeny např. v článku [16].

Zařazení fotoelektrického jevu má význam hlavně pro přirozené zavedení myšlenky kvantování energie a také pro jeho využití v praxi (např. ve fotovoltaiice, fotoelektronických součástkách nebo CCD kamerách). Z historického hlediska jde o významný experiment, který změnil náš pohled na světlo a přispěl k myšlence kvantování energie a zrodu kvantové teorie. V roce 1905 jej vysvětlil Albert Einstein, za což později získal Nobelovu cenu.

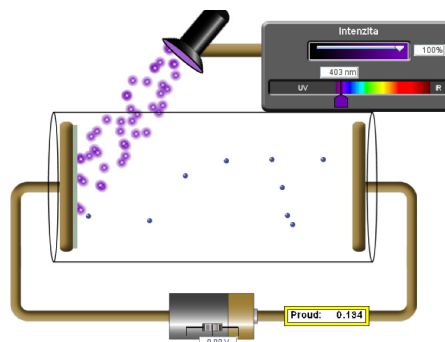
Demonstrační experiment s plechovkou

Fotoelektrický jev spočívá v uvolňování elektronů z kovu, na něj svítíme světlem určitých vlnových délek, což vede ke vzniku elektrického proudu. Demonstrační provedení fotoelektrického jevu³ lze realizovat s plechovkou a UV lampičkami.

Experiment provádíme s hliníkovou plechovkou (hliník má z dostupných kovů nejnižší výstupní práci, takže dostatečně krátkou vlnovou délku mají již malé dobře dostupné sterilizační UVC lampičky). Před provedením experimentu jemně osmirkujeme povrch plechovky v místě, kam budeme svítit, abychom se zbavili oxidů hliníku, které mají vyšší výstupní práci. Na plechovku zavěšíme alobalový proužek jako indikátor, jestli je plechovka nabitá, a nabijeme plechovku PVC tyčí třenou o látku či kožešinu. Tento experiment je stejně problematický jako ostatní pokusy z elektrostatiky – pokud se ve špatně větrané třídě plné studentů kvůli vysoké vlhkosti vzduchu nepodaří plechovku nabít, můžeme k nabití plechovky využít např. indukční elektriku, nebo pomůcky fénem udržujeme na vyšší teplotě, než je teplota okolí, aby se na nich nesrážela vlhkost.



Obr. 1.3: Pomůcky pro demonstraci fotoelektrického jevu.



Obr. 1.4: Aplet zobrazující simulaci fotoelektrického jevu [1].

³Experiment pochází z diplomové práce Tomáše Popka [19].

Na nabitou plechovku posvítíme postupně třemi zdroji světla o různé vlnové délce – nejprve viditelným světlem (LED svítidla), pak světlem na rozhraní viditelného fialového světla a blízkého UV (UVA lampa), a nakonec UV světlem o nejkratší vlnové délce (UVC lampa). Pokud nedochází k samovolnému vybíjení plechovky kvůli vlhkosti vzduchu, při posvícení viditelným světlem ani UVA lampou se nic nestane a plechovka zůstane nabitá, resp. se velmi pomalu vybíjí. V případě UVC lampy dojde k výraznému urychlení vybíjení.

Před provedením experimentu můžeme nechat studenty odhadnout výsledek experimentu, případně předložíme svůj odhad založený na představách klasické fyziky o světle: Dle klasické fyziky dopadá světlo jako vlnění, takže předává elektronům kovu energii postupně, jako by je „rozkmítávalo“. Když tedy budeme na plechovku svítit dostatečně intenzivním světlem libovolné vlnové délky dostatečně dlouho, měly by elektrony postupně získat dost energie na to, aby se uvolnily z vazeb v kovu pryč, takže se plechovka vybije. Skutečnost, že světlo příliš velkých vlnových délek fotoelektrický jev nezpůsobí – a to ani pokud jde o světlo velké intenzity – nelze vysvětlit na základě vlnového popisu světla.

Einsteinovo vysvětlení

Pro vysvětlení fotoelektrického jevu můžeme využít aplet,⁴ který umožňuje zobrazit fotony dopadající na kov a uvolňované elektrony (obr. 1.4). Posuvníkem lze nastavit různé vlnové délky a měnit intenzitu světla. Pozorujeme, že se elektrony začnou uvolňovat teprve od určité mezní vlnové délky, nezávisle na intenzitě světla.

Viděli jsme, že pro krátké vlnové délky došlo k uvolnění elektronů z plechovky, zatímco pro delší vlnové délky ne. Zdá se tedy, že světlo dlouhých vlnových délek nemá dost energie na to, aby elektrony uvolnilo. To je ale v rozporu s vlnovou představou světla, protože vlnění by mohlo elektrony postupně „rozkmítávat“, dokud by jim nedodalo dost energie pro jejich uvolnění. Energii, kterou vlnění přenáší, lze zvýšit zvětšením amplitudy, tj. použitím světla o větší intenzitě (jasnějšího světla). V apletu ale pozorujeme, že pro dlouhé vlnové délky nedojde k uvolnění elektronů ani při zvýšení intenzity světla. Fotoelektrický jev tedy nelze uspokojivě vysvětlit pouze na základě vlnové představy o světle.

Einstein přišel s jiným pohledem na světlo, pomocí kterého se mu podařilo fotoelektrický jev vysvětlit. Představoval si, že světlo nepředává energii jako vlnění, ale jako kulička – po balíčcích určité velikosti. Tomuto balíčku se říkalo tzv. „energetické kvantum“. Až výrazně později byl zaveden pojem *foton*⁵, který představuje „jeden balíček energie“.

Viděli jsme, že světlo malých frekvencí nedokáže „vyrazit“ elektrony pryč z atomu. Pokud si světlo představíme jako soubor dopadajících fotonů (balíčků energie), znamená to, že balíčky malých frekvencí nemají dost energie na vyražení elektronů. Z toho usoudíme, že energie fotonu souvisí s frekvencí. Když v apletu snižujeme vlnovou délku (zvýšujeme frekvenci) fotonů, kinetická energie elektronů roste (vylétávají rychleji a rychleji). Kdybychom změřili závislost energie elektronů na frekvenci dopadajících fotonů, zjistili bychom, že je lineární. Energie fotonu je přímo úměrná frekvenci ($E \sim f$). Konstantou úměrnosti je Planckova konstanta, která má hodnotu $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. Energie jednoho fotonu je

$$E_{\text{foton}} = hf.$$

Když foton tuto energii předá elektronu, její část je použita na uvolnění elektronu z vazeb v kovu (říká se jí výstupní práce $W_{\text{výstupní}}$) a zbylá energie se přemění na kinetickou energii vylétávajícího elektronu:

⁴PhET Interactive Simulations: Photoelectric effect, *University of Colorado Boulder*, dostupný na <https://phet.colorado.edu/cs/simulations/photoelectric>

⁵V následujícím vysvětlení je použita současná terminologie využívající pojem „foton“, ačkoli v původním Einsteinově vysvětlení bylo použito pouze „energetické kvantum“.

$$\underbrace{hf}_{\text{energie dodaná fotonem}} = \underbrace{W_{\text{výstupní}}}_{\text{energie nutná k uvolnění elektronu z vazeb v kovu}} + \underbrace{E_k}_{\text{kinetická energie elektronu}}.$$

Zvýšení kinetické energie elektronů při použití fotonů o vyšší frekvenci v apletu pozorujeme jako rychleji vylétávající elektrony.

Nastavení apletu: Při využití apletu je vhodné nastavit několik níže popsanych zjednodušení, abychom se vyhnuli nutnosti okomentovat některé složitější efekty, které ovlivňují závislost fotoproudu na frekvenci světla. Pro nejjednodušší zobrazení, které aplet nabízí, nastavíme v menu:

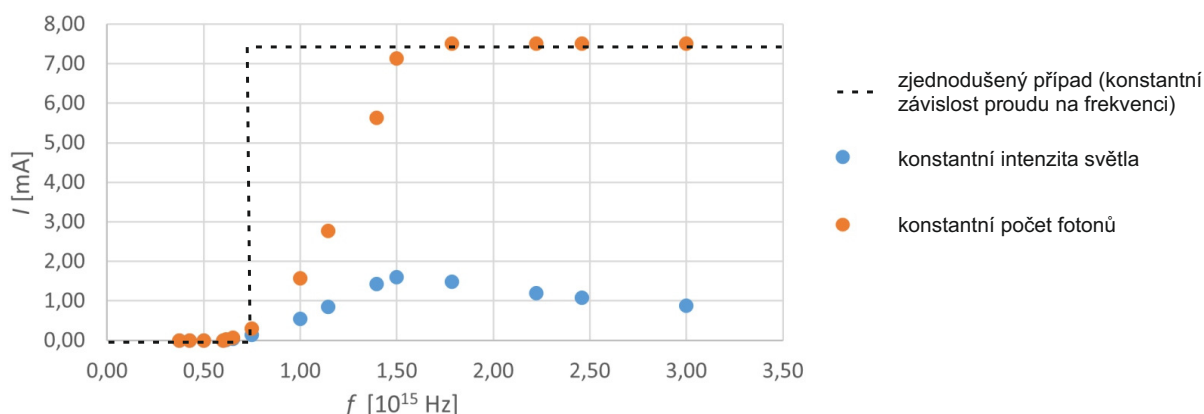
- Zobrazení fotonů místo jednolitého kužele světla (*Možnosti* → *Zobrazit fotony*).
- *Zobrazit pouze elektrony s nejvyšší energií* (nastavení se neprojeví na hodnotách proudu).
- *Možnosti* → *Kontrola počtu fotonů namísto intenzity*.

Toto nastavení je podrobněji okomentováno dále.

Komentář k nastavení apletu: Zjednodušený graf závislosti proudu na frekvenci je na obrázku 1.5 znázorněn přerušovanou čarou. Pro nízké frekvence je proud nulový a v místě mezní frekvence (označované někdy jako „dlouhovlnná hrana“) má ostrou hranu, za níž proud vzroste a je konstantní. V takto zjednodušeném případě předpokládáme, že:

- Všechny elektrony v kovu mají stejnou výstupní práci, a tedy i stejnou kinetickou energii po absorpci fotonu. (✓)
- Počet dopadajících fotonů je stejný pro různé frekvence. (✓)
- Podíl fotonů, které zainteragují s elektrony fotoelektrickým jevem, je stejný pro různé frekvence. (Tj. fotoelektrický jev má stejný účinný průřez pro různé frekvence.) (✗)

Symbolem ✓/✗ jsou označeny předpoklady, které aplet umí/neumí zohlednit.



Obr. 1.5: Závislost proudu na frekvenci světla naměřená pomocí apletu PhET při konstantní intenzitě světla, resp. při konstantním počtu fotonů.

• **Různá výstupní práce elektronů** Ve skutečnosti jsou elektrony v kovu vázány různě silnými vazbami, mají tedy různou výstupní práci, a tím pádem i různou kinetickou energii po absorpci fotonu. Proto s rostoucí frekvencí fotonů roste pravděpodobnost, že foton „trefí“ elektron s výstupní prací menší, než je energie fotonu, a dojde k uvolnění elektronu. Proud proto nezačíná téct skokově při překročení mezní frekvence, ale v grafu je vidět náběhová hrana, kdy proud roste až do chvíle, než mají fotony dostatečnou energii, aby mohly uvolnit libovolný elektron bez ohledu na to, jak silně jsou vázané (na obr. 1.5 oranžově a modře).

V apletu lze nastavit zobrazování jen elektronů s největší kinetickou energií (a tedy nejnížší výstupní prací) zaškrtnutím pole *Zobrazit pouze elektrony s nejvyšší energií*. Hodnoty proudu jsou ale bez ohledu na toto nastavení počítány pro různou výstupní práci jednotlivých elektronů, proto v grafu závislosti proudu na frekvenci bude vždy náběhová hrana.

• **Konstantní intenzita světla vs. počet fotonů** Aplet nabízí možnost nastavení konstantní intenzity světla nebo konstantního počtu fotonů. Stejná intenzita světla znamená, že světlo nese stejnou energii. Pokud zachováme intenzitu světla, ale změníme jeho frekvenci, vylučujeme tím zachování stejného počtu fotonů. Pokud zachováme intenzitu světla, ale zvýšíme frekvenci, poklesne počet fotonů, protože foton s vyšší frekvencí nese větší energii. V grafu se to projeví jako pokles proudu (počtu vyražených elektronů), který je patrný na obrázku 1.5 (modře). Těsně za mezní frekvencí je kvůli rozdílné výstupní práci elektronů výraznější efekt náběhové hrany než pokles proudu způsobený poklesem počtu fotonů. Pro zjednodušenou konstantní závislost proudu na frekvenci je třeba zapnout *Možnosti* → *Kontrola počtu fotonů namísto intenzity* (v grafu na obr. 1.5 oranžově).

Výpočtová úloha – energie fotonu

Následuje úloha na výpočet kvanta energie např. zeleného světla, tj. fotonu o vlnové délce 500 nm, kde si studenti procvičí vztah mezi energií a frekvencí fotonu.

Řešení: Nejprve je potřeba připomenout vztah mezi frekvencí, vlnovou délkou světla a jeho rychlostí

$$\lambda = \frac{c}{f} \implies f = \frac{c}{\lambda}.$$

Pokud studenti tento vztah neznají, je vhodnější celou úlohu vynechat a první seznámení s fotoelektrickým jevem ponechat na konceptuální úrovni, protože pro základní pochopení jeho podstaty není výpočet klíčový. K výpočtům se lze vrátit až v další hodině, případně pro zjednodušení v zadání vlnovou délku nahradit přímo frekvencí (zde přibližně $0,6 \cdot 10^{15}$ Hz).

Při výpočtu vedeme studenty k řádovému zaokrouhlování, které urychlí výpočet v porovnání se zadáváním hodnot do kalkulačky s nepotřebnou přesností. Tento přístup budí u studentů nadšení, neboť překračuje přesný způsob práce, na který jsou zvyklí z matematiky. V případě zeleného světla může dosazení vypadat takto:

$$\begin{aligned} E_{\text{fotonu}} &= hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = \frac{18 \cdot 10^{-34} \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} \text{ J} \\ &\doteq \frac{20 \cdot 10^{-19}}{5} \text{ J} = 4 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \end{aligned}$$

Upozorníme studenty, že používání jednotky joule není v mikrosvětě praktické, protože se zde pracuje s hodnotami velmi malými v porovnání s 1 J, proto je vhodné zavést novou jednotku elektronvolt (eV), která zjednoduší práci s exponenty. S využitím převodního vztahu

$$1 \text{ eV} \doteq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

je energie fotonu

$$E_{\text{fotonu}} \doteq \frac{4 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} \doteq 2,5 \text{ eV}.$$

Fotony viditelného světla tedy mají energii řádově jednotek elektronvoltů.

Praktické využití fotoelektrického jevu

Na závěr vyzveme studenty, aby se zamysleli nad příklady zařízení z běžného života, která využívají fotoelektrický jev, tj. fungují na principu „světlo dopadá na kov (nebo jiný materiál – např. polovodič) a díky tomu vzniká elektrický proud“. Pokud máme dostatek času, necháme studenty přemýšlet ve skupinách, při nedostatku času provedeme shrnutí s celou třídou najednou. Mezi typickými odpověďmi studentů se může objevit např:

- solární panely, fotovoltaika
- fotosenzory (fotopasti, fotobrány)

Pokud nezazní, je vhodné doplnit:

- digitální fotoaparáty, kamery (CCD – charge coupled device)
- polovodičové součástky (fotodioda, fototranzistor)
- kopírky

2. hodina: Kvantování energie v atomech

Úvod

Pokud navazujeme na předchozí hodinu, připomeneme fotoelektrický jev např. otázkami:

- O co se jedná ve fotoelektrickém jevu?
- Která experimentální pozorování u fotoelektrického jevu odporují předpovědím vlnové teorie světla?
- Jak lze tato pozorování vysvětlit pomocí kvantového modelu světla?

Čarová spektra atomů

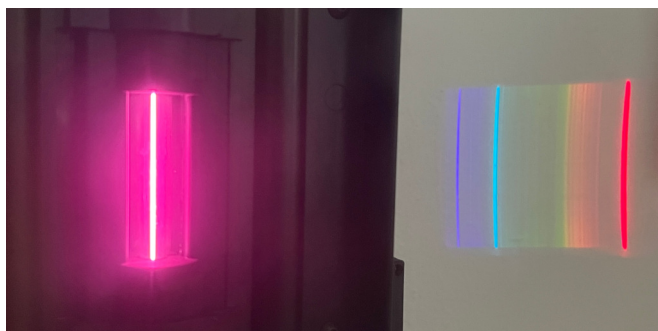
V této hodině představíme další jev, který nebylo možné vysvětlit pomocí klasické fyziky a vedl ke vzniku kvantové teorie. Jedná se o čarová spektra atomů. Klasická fyzika totiž nenabízí odpověď na otázku, proč atomy nevyzařují spojité spektrum, ale jen určité vlnové délky.

Pozorování emisního spektra plynů

Budeme pozorovat světlo, které vyzařují atomy, když je donutíme zářit např. ve výbojové trubici. Použijeme k tomu difrakční mřížku nebo difrakční brýle, které rozkládají světlo na jednotlivé vlnové délky. Upozorníme studenty, aby se nedotýkali přímo difrakční mřížky, aby ji nepoškodili. Nemáme-li k dispozici výbojovou trubici, můžeme pozorovat čarové spektrum alespoň na doutnavce (v červeném světýlku prodlužovaček), nebo propan-butanového hořáku.



(a) Výbojová trubice se zdrojem.



(b) Pohled na výbojku skrz difrakční mřížku.

Obr. 1.6: Pozorování emisního spektra vodíkové výbojky.

Spojité spektrum Nejprve přes mřížku pozorujeme sluneční světlo za oknem (upozorníme studenty, aby se nedívali přímo do slunce!) nebo světlo žárovky, svíčky či bílé LED svítidly. Vidíme „duhu“ – tj. spojité spektrum, které obsahuje všechny vlnové délky a tvoří jednolitý pruh. (Podrobněji se o spektrech jednotlivých zdrojů světla lze dočíst v [9].)

Čarové spektrum Pro ukázkou čarového spektra použijeme výbojovou trubici naplněnou plyným vodíkem. Když trubici připojíme ke zdroji napětí, začne v ní probíhat výboj vydávající růžové světlo. Trubice s plynem o nízkém tlaku je připojena k vysokému napětí, přítomné volné nabitě částice jsou urychleny a ionizují plyn. Nárazy nabitých částic do neutrálních atomů způsobují jejich excitaci a atomy následně při deexcitaci vyzařují fotony.

Vyzveme studenty, aby se podívali na světlo výbojky přes difrakční mřížku a popsali, co vidí. Jde o tři barevné čáry po obou stranách výbojové trubice – červená, modrá a fialová (viz 1.6b). Protože jsou od sebe čáry odděleny, říká se spektru čarové nebo diskrétní.

Pro lepší viditelnost z větší vzdálenosti můžeme zatemnit místnost, ale nebývá to nutné. Spektrální čáry pozorujeme periferním viděním stále pod stejným úhlem od zdroje. Pokud mají studenti s jejich zhlédnutím problém, pak je vhodné je vyzvat, aby přišli blíž. Kromě tří výrazných čar (červené, modré a fialové) může být vidět i méně intenzivní duhové parazitní spektrum, které je způsobeno nedokonalým zatemněním místnosti a světlem zvenčí a také tím, že výbojka může kromě vodíku obsahovat i malé množství vzduchu, který přispívá jinými vlnovými délkami.

Spektrometrem s optickým vláknem naměřeným k výbojce (viz obr. 1.7) můžeme změřit vlnovou délku pozorovaných čar (656 nm, 486 nm a 434 nm) a zapsat je na tabuli pro pozdější výpočty a ověřování.

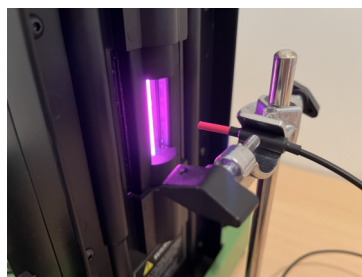
Viděli jsme, že atomy vyzařují pouze světlo určitých vlnových délek. Pro atom vodíku jsou to ve viditelném spektru vlnové délky 656 nm, 486 nm a 434 nm. Podle klasické fyziky by atom měl být schopen vyzařovat libovolnou energii. Vysvětlení tohoto jevu přináší opět až kvantová fyzika a částicový pohled na světlo.

Kvantová hypotéza – kvantování energie světla

K vysvětlení čarových spekter atomů využijeme myšlenku kvantování energie světla. Pokud navazujeme na předchozí hodinu zabývající se fotoelektrickým jevem, připomeneme myšlenku fotonu a vztah mezi energií a frekvencí na další výpočtové úloze, ve které studenti vypočítají energii fotonu o jiné vlnové délce. Pokud jsme se fotoelektrickým jevem nezabývali, místo výpočtové úlohy musíme nejprve myšlenku fotonu jakožto energetického kvanta zavést.



(a) Připojení spektrometru.



(b) Detail optického vlákna.

Obr. 1.7: Měření vlnových délek spektra pomocí spektrometru.

Kvantování energie v atomu

Čarová spektra atomů můžeme vysvětlit díky myšlence, že je energie světla vyzařována a přijímána látkou po balíčcích určité velikosti, kdy velikost energie balíčku (kvanta) je přímo úměrná frekvenci světla.

Tato myšlenka byla inspirována fotoelektrickým jevem a některými dalšími experimenty. Pokud by platila i pro vyzařování jednotlivého atomu, pak čarové spektrum naznačuje, že atom nemůže vyzařit balíček energie libovolné velikosti, ale jen určitých daných hodnot. Jestliže vyzařovaná energie souvisí se změnou energie elektronu v atomu, pak to znamená, že se energie elektronu nemůže změnit o libovolnou hodnotu, ale jen o určité přesně dané hodnoty.

Předpokládejme, že elektron v atomu může mít pouze přesně dané „povolené“ hodnoty energie, mezi nimiž může přecházet. Místo souvislého rozmezí možných energií tak dostáváme jakýsi „žebřík povolených energií“. Elektron může mít pouze energii odpovídající příčkám žebříku, nikoli hodnotám mezi nimi. Schématu, který má tvar takového „žebříku“ říkáme *systém energetických hladin* a jeho pomyslným „příčkám“ *energetické hladiny*. Když má elektron nějakou energii, říkáme také, že je „ve stavu s danou energií“. Při přechodu z jedné energetické hladiny na druhou (z jednoho stavu do druhého) elektron

- odevzdá energii, při tom je z atomu je vyzařen foton (tzv. *emise*) – nastává při přechodu elektronu z vyšší hladiny na nižší, energie elektronu se tím sníží,
- přijme energii, při tom je atomem pohlcen foton (tzv. *absorpce*) – nastává při přechodu elektronu z nižší hladiny na vyšší, energie elektronu se tím zvýší.

Energie fotonu odpovídá rozdílu energií hladin, mezi kterými elektron přechází:

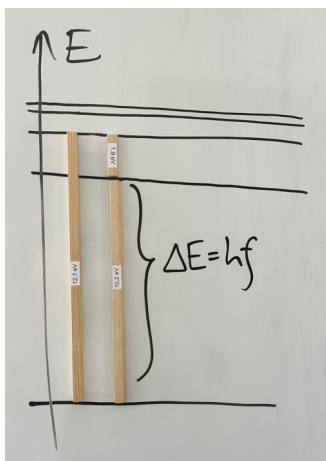
$$E_{\text{fotonu}} = |\Delta E_{\text{elektronu}}| = |E_{\text{počáteční}} - E_{\text{koncová}}|.$$

Tento vztah lze vizualizovat pomocí demonstračních tyček nebo proužků znázorňujících energii vyzařeného či přijatého fotonu. Délka tyčky odpovídá rozdílu mezi energetickými hladinami, mezi nimiž elektron při vyzaření fotonu přešel. Tyčky skládáme na připravené schéma energetických hladin vždy mezi dvě odpovídající hladiny.

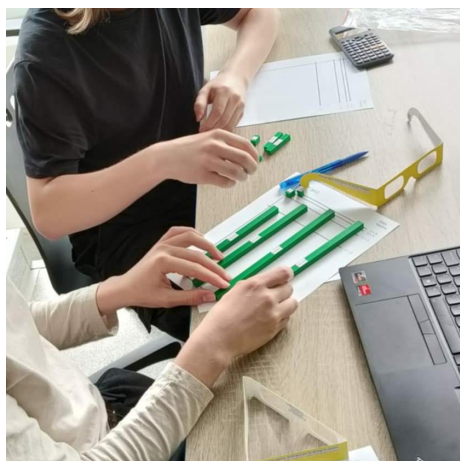
Tohoto znázornění využívá následující aktivita, při níž studenti pracují se schématem energetických hladin samostatně (viz obr. 1.8).

Aktivita s tyčkami – skládání energetických hladin

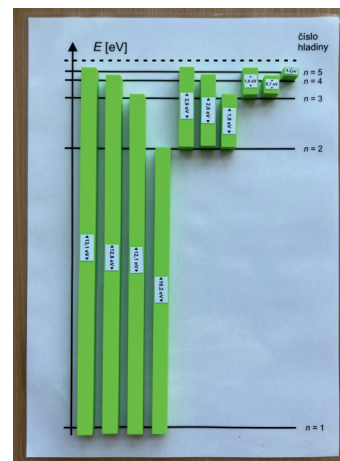
Cílem aktivity je přiblížit studentům souvislost energie světla vyzařeného atomem a povolených energií elektronu v atomu. Studenti pracují ve dvojicích či malých skupinách s pomůckou tvořenou sadou tyček a schématem energetických hladin atomu vodíku. Délka tyček odpovídá energiím fotonů vyzařených při přechodu elektronu mezi prvními pěti hladinami atomu vodíku. Podle pokynů v pracovním listu skládají tyčky na vytištěné schéma energetických hladin. V pracovním



(a) Demonstrace na tabuli



(b) Skupinová práce



(c) Tyčky na schématu energetických hladin

Obr. 1.8: Znázornění schématu energetických hladin pomocí tyček.

listu odpovídají na otázky, v nichž musí projevit porozumění významu schématu energetických hladin.

Při zadávání aktivity zdůrazníme, že délky tyček odpovídají energiím fotonů, které vyzařovala vodíková výbojka. Pozorovali jsme fotony ve viditelném spektru – jejich energiím odpovídají tři z předložených tyček. Spektrum atomu vodíku ale obsahuje i vlnové délky mimo viditelné světlo, proto máme tyček více, než kolik čar jsme pozorovali pouhým okem. Skládání tyček na schéma energetických hladin můžeme demonstrovat na tabuli pomocí větších tyček s nalepenou magnetickou fólií (obr. 1.8a).

První tři úlohy v pracovním listu ověřují základní pochopení přechodů mezi jednotlivými hladinami, třetí úloha je výpočtová. Úlohy 4–6 jsou rozšiřující a jsou určeny studentům, kteří jsou hotovi rychleji a kterým pochopení základní myšlenky energetických hladin nečiní potíže.

Okomentujeme názvosloví použité v pracovním listu a číslování energetických hladin: *základní stav* – stav s nejnižší energií ($n = 1$), *excitované stavy* – stavy s vyššími energiemi $n > 1$, *ionizační energie* – energie, kterou musíme dodat pro uvolnění elektronu z atomu. Elektron uvolněný z atomu má energii vyšší, než naznačuje přerušovaná čára.

Na energetické ose záměrně nejsou uvedeny hodnoty energií (které jsou konvenčně volené jako záporné), aby studenty při prvním seznámení s poměrně obtížnou myšlenkou energetických hladin nerozptylovaly. V rozšiřujícím úkolu 5 mohou studenti hodnoty na ose dopočítat.

Aktivitu uzavřeme společným vyhodnocením řešení pracovního listu a shrnutím důležitých myšlenek:

- Energie elektronu v atomu nemůže být libovolná, nabývá jen určitých povolených hodnot. Tomu říkáme, že je energie kvantovaná.
- Když elektronu v atomu dodáme energii (pohltní = absorbuje foton), přejde do stavu s vyšší energií (excituje se = „přeskočí“ na vyšší hladinu).
- Když elektron v atomu odevzdá energii (vyzáří = emituje foton), přejde do stavu s nižší energií (deexcituje se = „přeskočí“ na nižší hladinu).
- Energie vyzařovaného fotonu odpovídá rozdílu energií hladin, mezi nimiž elektron přeskočil. Díky vztahu $E = hf$ můžeme dopočítat frekvenci a vlnovou délku světla.

1.5 Modifikace a návaznost na jiné moduly:

Podle časových možností a ŠVP lze modul zkrátit a věnovat se např. pouze jednomu z uvedených experimentů. Je vhodné, aby tyto úvodní experimenty netvořily celou náplň výuky kvantové fyziky, ale zbyl prostor také pro představení některých principů kvantové fyziky, jako je například princip superpozice a kvantové měření, nebo existence nekompatibilních veličin, které jsou popsány v modulech 2 a 3.

Modul 2: Základní principy kvantové fyziky

Druhý modul je věnován vlnově-částicovému dualismu a základním principům kvantové fyziky jako je princip superpozice, kvantové měření a redukce superpozice při měření. Je rozdělen do tří vyučovacích hodin a je vystavěn tak, aby umožňoval dotknout se klíčových myšlenek kvantové fyziky i na středoškolské úrovni.

První hodina je zaměřena na vlnově-částicový dualismus, druhé dvě hodiny představují princip superpozice a kvantové měření pomocí hravých aktivit. Na závěr jsou tyto principy využity k popisu vlnově-částicového dualismu z pohledu kvantové fyziky. Pokud modulu nemůžeme věnovat celé tři hodiny, lze některé aktivity vynechat nebo zařadit samostatně.

2.1 Cíle:

- Student vysvětlí, jak se ve dvojštěrbinovém experimentu s elektrony projevují jejich vlnové i částicové vlastnosti.
- Student využije princip superpozice a vlastnosti kvantového měření k vysvětlení, jak přítomnost detektoru ovlivňuje výsledek dvojštěrbinového experimentu.

2.2 Časový plán:

Modul 2 – hodina 1/3		Čas
Úvod		5 min
Připomenutí vlastností vlnění a hmotných bodů (kuliček)	• diskuse ve dvojicích či skupinách • společné shrnutí	10 min
Ukázka interference vlnění	• video vodních vln na rybníce • dvojštěrbinový experiment pomocí laserového ukazovátka	5 min
Dvojštěrbinový experiment s kuličkami a vlnami	• studenti odhadnou výsledek experimentu pro kuličky a vlnění • ověření výsledku experimentu pomocí spreje a kartonové dvojštěrbiny	5 min
Dvojštěrbinový experiment s elektrony	• vysvětlení obsahu a ovládání apletu • samostatná práce studentů s pracovním listem	15 min
Shrnutí	• zdůraznění klíčových pozorování	5 min

Modul 2 – hodina 2/3		Čas
Úvod	• stručné připomenutí dvojštěrbínového experimentu	5 min
Diskuse o vlnově-částicovém dualismu	• studenti se ve skupinách vyjadřují ke tvrzením o vlnově-částicovém dualismu (Concept Cartoons) • společné shrnutí	15 min
Dvojštěrbínový experiment s detektorem	• demonstrační ukázka na apletu, co se stane, když zapneme detektor určující, kterou štěrbínou elektron prošel	5 min
Kvantové piškvorky	• uvedení principu superpozice a kvantového měření • hra ve skupinách • shrnutí	15–20 min

Modul 2 – hodina 3/3		Čas
Úvod	• připomenutí principu superpozice a kvantového měření • konceptuální otázky týkající se principu superpozice a měření (pomocí kvantových piškvorek)	10 min
Kvantové lodě	• vysvětlení pravidel, hra, shrnutí • konceptuální otázky týkající se kvantového měření a principu superpozice (pomocí kvantových lodí)	20 min
Vysvětlení dvojštěrbínového experimentu	• vysvětlení změny obrazce při zapnutí detektoru pomocí principu superpozice a kvantového měření	10 min
Závěr – motivační tečka	• kvantové počítače a Groverův algoritmus	5 min

2.3 Pomůcky:

- Laserové ukazovátko a dvojštěrbina
- Sprej s obarvenou vodou a kartonová dvojštěrbina
- Telefony či tablety s připojením k internetu pro práci s apiletem
- Pracovní list *Dvojštěrbínový experiment s elektronikou*
- Hlasovací karty s písmeny pro studenty na odpovídání na otázky
- Kvantové piškvorky: do skupiny hrací plán 3×3, hrací kostka, žetony pro oba hráče (6× , 6× , 4× , 4× ) , větší demonstrační žetony na magnetickou tabuli
- Kvantové lodě: do skupiny hrací plán 3×3, cca 20 čtverečků z barevné průhledné fólie,

2.4 Průběh výuky:

1. hodina: Vlnově částicový dualismus

Vlnově-částicový dualismus je pojmenování pro skutečnost, že chování objektů mikrosvěta (elektronů, fotonů, ...) v některých situacích či experimentech připomíná chování vlnění, ale v jiných zase lépe odpovídají chování klasických částic¹. Pokud navazujeme na modul 1, můžeme jako příklad uvést světlo, které má vlnovou délku a interferuje jako vlnění, ale zároveň pro vysvětlení fotoelektrického jevu a čárových spekter atomů bylo praktičtější na ně nahlížet jako na balíčky energie, které jsou blíže představě kuliček. Dnes uvidíme, že podobné „dvojí chování“ vykazují i elektrony a že z toho plyne zcela nový pohled na fyziku mikrosvěta.

Přístup k vlnově-částicovému dualismu můžeme zarámovat citátem Richarda Feynmana [13], který připomíná, že veškeré paradoxy kvantového světa pramení z našich představ, jak by příroda měla fungovat:

The “paradox” is only a conflict between reality and your feeling what reality ought to be. (Richard Feynman)

Jediným paradoxem je rozpor mezi skutečností a tím, jaká by podle nás skutečnost „měla být“. (Richard Feynman, volný překlad)

Připomenutí vlastností vlnění a kuliček

Než se začneme zabývat chováním elektronů, připomeneme si vlastnosti typické pro klasické kuličky a vlnění. Studenti ve dvojicích napíší co nejvíce vlastností charakterizujících vlnění a klasické kuličky. K dispozici dostanou jen krátký čas (cca 2–3 min), následuje společné shrnutí, nebo můžeme návrhy studentů rovnou zapisovat na tabuli. Mezi typickými odpověďmi se může objevit:

Vlnění	Klasické kuličky
vlnová délka, frekvence, amplituda	hmotnost
rychlost šíření	hybnost, rychlost
odráží se, láme	odráží se
různé druhy: podélné, příčné, postupné, stojaté	
rozprostřené v prostoru	lokalizované v jednom bodě
energii předává rozprostřenou na celou plochu, kam dopadá	energii předává celou najednou jako balíček do jediného bodu
interference	nepozorujeme interferenci

Zdůrazníme důležité rozdíly v chování kuliček a vlnění: *lokalizace v prostoru*, která souvisí se *způsobem předávání energie*, a *interference*. Můžeme na ně studenty navést např. otázkami

- Jaký je rozdíl v tom, když chceme popsat „kde se nachází kulička“ a „kde se nachází vlna“?

¹V dalším textu budeme používat označení „klasické kuličky“, abychom se vyhnuli dvojímu významu slova „částice“, které zahrnuje jednak částici jako objekt mikrosvěta, ale i klasickou částici ve smyslu hmotného bodu, jak ji chápeme v klasické fyzice.

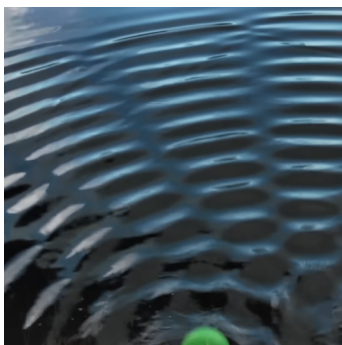
- Když na nějakou plochu dopadá vlnění nebo kulička, předávají jí svoji energii. Jaký je rozdíl v tom, do jakých míst energii předávají?
- Můžeme u kuliček pozorovat interferenci?

Ukázka interference

Typickým projevem vlnění je interference. Pokud studenti interferenci znají např. z vlnové optiky, můžeme ji jen krátce připomenout pomocí následujících ukázek. Pokud se ještě s interferencí vlnění nesetkali, věnujeme vysvětlení tohoto jevu delší čas.

Vlny na vodní hladině Promítneme krátké video² interferujících vln na vodní hladině (obr. 2.1a). Při vysvětlení zdůrazníme, že interferenční maxima a minima vznikají tam, kde se „hřebeny“ a „údolí“ dvou vln navzájem zesilují nebo ruší.

Světlo procházející dvojštěrbinou Laserovým ukazovátkem posvítíme přes dvojštěrbinu a promítneme na stěnu či na strop interferenční obrazec (obr. 2.1b). Nemáme-li k dispozici dvojštěrbinu z vhodné optické soupravy, lze využít např. improvizovanou dvojštěrbinu vyrobenou ze tří tuh do mikrotužky (pentilky) spojených plastelínou (obr. 2.1c).



(a) Interference vodních vln na rybníce [3].



(b) Interferenční obrazec na zdi vytvořený pomocí laserového ukazovátka a dvojštěrbiny [8].



(c) Dvojštěrbina z tuh do mikrotužky a plastelíny.

Obr. 2.1: Ukázka interference vlnění.

Dvojštěbinový experiment

Nyní budeme zkoumat vlastnosti částic v mikrosvětě pomocí dvojštěbinového experimentu (který známe např. z optiky jako Youngův pokus). Nejprve se podíváme, jak by se v tomto experimentu chovaly klasické objekty jako jsou kuličky a vlnění, abychom jejich chování mohli porovnat s chováním elektronů nebo jiných objektů mikrosvěta.

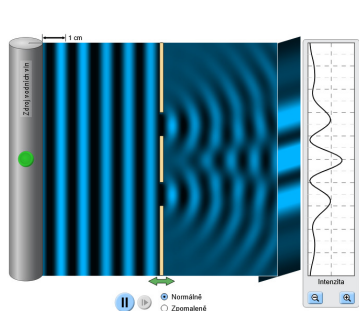
Dvojštěbinový experiment s kuličkami a vlněním

Stručně představíme, o co se ve dvojštěbinovém experimentu jedná: posíláme kuličky nebo vlnění skrz dvě úzké štěrby blízko sebe. V případě kuliček můžeme použít analogii s házením tenisáků proti zdi se dvěma otvory či střílení z děla.

Studenti předpovídají výsledek dvojštěbinového experimentu pro (i) kuličky a (ii) vlnění (např. vodní vlny) a své předpovědi zakreslují do pracovního listu.

²Dostupné na <https://www.youtube.com/watch?v=Iuv6hY6zsd0&t=257s>., stopáž 4:45–5:20.

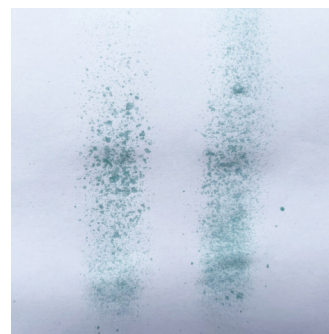
Pro ověření předpovědí studentů v případě vlnění se můžeme odkázat na provedené experimenty s vodními vlnami. Pro další vizualizaci můžeme využít aplet zachycující vlnění na vodní hladině dopadající na stínítko (obr. 2.2a, https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-interference/latest/wave-interference_all.html?locale=cs). V případě kuliček můžeme použít jednoduchý demonstrační experiment (obr. 2.2). Přes kartonovou dvojštěrbinu stříkneme rozprašovačem obarvenou vodu na stínítko (tabuli). Vodní kapky představují klasické kuličky a zanechají na stínítku stopu. Stopu je dobře vidět na bílé i na zelené tabuli (jen jako mokrou stopu), případně lze na tabuli přilepit papír, aby byla stopa lépe vidět.



(a) Vodní vlny – PhET aplet [2]



(b) Kuličky – kartonová dvojštěrbina



(c) Kuličky – obrazec na stínítku

Obr. 2.2: Ověření výsledků dvojštěrbinového experimentu s vlněním a klasickými kuličkami.

Dvojštěrbinový experiment s elektrony

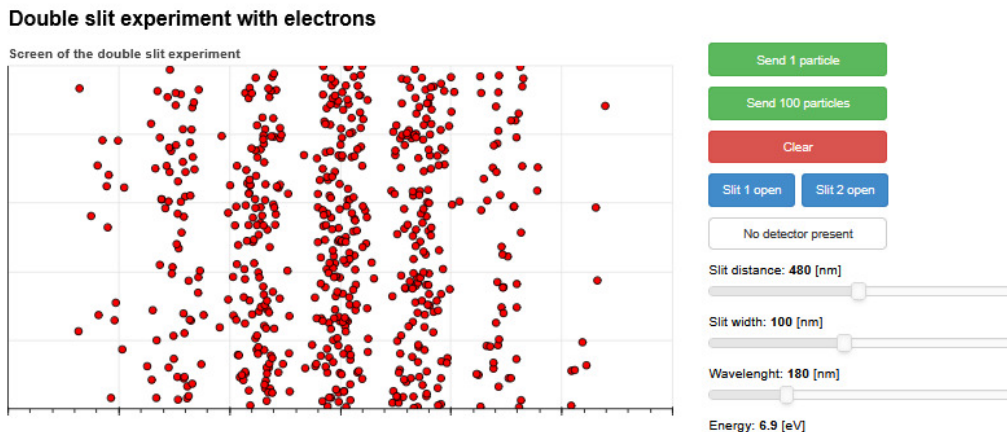
Dvojštěrbinový experiment s elektrony je slavným myšlenkovým experimentem využívaným k představení podstaty principů kvantové fyziky (viz např. Feynmanovy přednášky z fyziky [12]). Později byl tento experiment úspěšně realizován také experimentálně [4].

V následující aktivitě studenti samostatně či ve skupinách pracují s apiletem³ zobrazujícím dvojštěrbinový experiment s elektrony, který jim přiblíží chování objektů mikrosvěta (viz obr. 2.3). Aplet zobrazuje stínítko, na něž je možno skrz štěrby posílat elektrony. Předpokládáme, že svazek posílaných elektronů má tak nízkou intenzitu, že v jeden okamžik dopadá na stínítko pouze jeden elektron. Elektrony posíláme tlačítky v pravé části apletu. Tlačítko „Send 100 particles“ slouží pouze pro urychlení zobrazení – stále platí, že elektrony posíláme skrz štěrby po jednom v těsném sledu za sebou. Pomocí tlačítek na pravém panelu lze nastavit, která štěrbina je otevřená. Aplet také umožňuje zapnout či vypnout detektor zjišťující, kterou štěrbinou elektron prošel. Dále můžeme nastavovat vzdálenost štěrbin a energii (a tím i vlnovou délku) elektronů.

Experiment má tři základní nastavení: (1) pokud jsou obě štěrby otevřeny a detektor není přítomen, vytvoří elektrony na stínítku interferenční obrazec, (2) pokud je otevřená pouze jedna štěrbina, zobrazí se na stínítku jedna stopa (nezávisle na přítomnosti detektoru), (3) pokud jsou obě štěrby otevřeny a je zapnutý detektor, vytvoří se na stínítku dvě stopy, které se více či méně překrývají podle vzdálenosti štěrbin. Pro překrytí a porovnávání stop z různých nastavení experimentu lze zaškrtnout možnost „Keep previous measurements“ a na pravém panelu měnit barvu stop zobrazovaných na stínítku. Aplet také nabízí zobrazení histogramu a teoretické hustoty pravděpodobnosti. Další podrobnosti o apletu se lze dočíst v [18].

Studenti v této hodině používají pouze nastavení (1), tj. obě štěrby jsou otevřené, nepoužívají detektor. Pracují s apiletem podle instrukcí v pracovním listu a odpovídají na otázky, které je vedou k zamyšlení nad pravděpodobnostním chováním elektronů dopadajících na stínítko a k porovnání vzniklého obrazce s obrazcem vytvořeným klasickými kuličkami, resp. vlněním.

³Dostupný na: https://fyzweb.cz/materialy/kvantovka/Double_slit_experiment.html

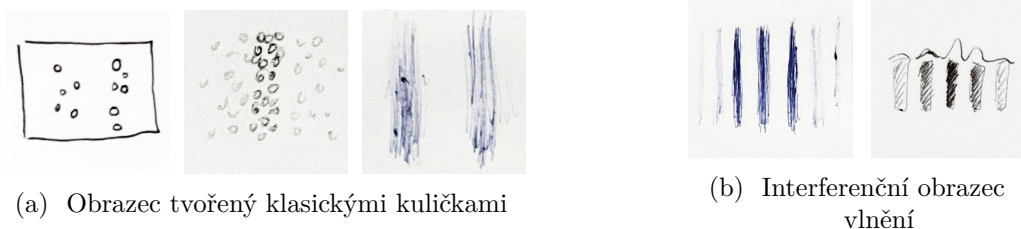


Obr. 2.3: Aplet zobrazující dvojštěrbinový experiment s elektrony [17].

Řešení a komentář k úkolům v pracovním listu:

Úkol 1: *Načrtněte, jak bude vypadat výsledek dvojštěrbinového experimentu v případě a) klasických kuliček, b) vlnění (např. vodních vln).*

V případě klasických kuliček se na stínítku objeví dvě stopy, viz obr. 2.4a. V náčrtcích se může objevit znázornění obrazce tvořeného tečkami po jednotlivých kuličkách (obr. 2.4a vlevo a uprostřed), nebo schematické znázornění dvou stop (obr. 2.4a vpravo). Pokud byly štěrbiny blízko u sebe, mohou se stopy překrývat a tvořit stopu jedinou (obr. 2.4a uprostřed). V případě vlnění je obrazec tvořen souvislými interferenčními proužky, viz obr. 2.4b.



Obr. 2.4: Ukázka studentských řešení úkolu 1.

Úkol 2: *a) Jak vypadá stopa po jednom elektronu? b) Umíte předpovědět, kam dopadne další elektron?* Jeden elektron zanechá na stínítku bodovou stopu (jako kdyby dopadala kulička). Není možné s jistotou předpovědět, na které místo vystřelený elektron dopadne – na rozdíl od střílení kuliček z děla, kdy podle zákonů klasické fyziky umíme přesně vypočítat, kam kulička doletí. Lze určit pouze pravděpodobnost, s jakou elektron na dané místo dopadne.

Úkol 3: *Na kterých místech stínítka je velká pravděpodobnost, že tam dopadne další vystřelený elektron?* Na různých místech stínítka je různá pravděpodobnost, že tam elektron dopadne. Velká pravděpodobnost dopadu elektronu je v místech, kde jsou interferenční maxima, nízká pravděpodobnost je v místech interferenčních minim, tj. „mezi interferenčními proužky“.

Úkoly 4 a 5: *Načrtněte obrazec, který jste dostali na stínítku a slovně popište, jak vypadá. V čem je obrazec vytvořený elektrony podobný obrazci vytvořenému a) kuličkami, b) vodními vlnami?* Obrazec na stínítku má podobný tvar jako interferenční obrazec vlnění složený ze souvislých interferenčních proužků, ale na rozdíl od něj je tvořen bodovými stopami po jednotlivých

elektronech. Je vhodné studenty upozornit, že i v případě světla je interferenční obrazec tvořen stopami po jednotlivých fotonech, ačkoli nejsou pozorovatelné pouhým okem při promítnutí obrazce na stěnu.

Společné shrnutí

Na závěr shrneme odpovědi na otázky v pracovním listu a zdůrazníme klíčová pozorování o chování elektronů:

- Chování elektronů je doprovázeno pravděpodobnostními jevy.
- Elektron svým chováním připomíná vlnění, protože jsme pozorovali interferenční obrazec.
- Elektron svým chováním připomíná částici (kuličku), protože na stínítku zanechává bodovou stopu.
- Interferenční obrazec jsme pozorovali, i když elektrony procházely *po jednom*. To znamená, že se interference projevila u každého elektronu zvlášť, jako kdyby procházel dvojštěrbínou jako vlna a interferoval „sám se sebou“. Není to tak, že by se obrazec objevil díky tomu, že spolu interferovalo více elektronů.

Zejména poslední myšlenku je potřeba velmi zdůraznit, protože studenti mají tendenci si interferenci elektronů zdůvodňovat jako interferenci dvou nezávislých elektronů.

Hodinu můžeme zakončit motivační ukázkou, co se stane, pokud budeme pomocí detektoru zjišťovat, kterou štěrbinou elektron prošel – interferenční obrazec se změní na obrazec podobný tomu, který zanechaly klasické kuličky. Tento jev vysvětlíme v následujících hodinách.



Obr. 2.5: Ukázka studentského řešení úkolu 4.

2. hodina: Základní principy kvantové fyziky (úvod)

Než se pustíme do základních principů kvantové fyziky, stručně připomeneme pozorování z dvojštěrbinového experimentu z minulé hodiny. Paradoxní duální chování elektronů pak ve druhé části hodiny použijeme jako motivaci pro popis mikrosvěta ze zcela jiného pohledu než dosud – pomocí principu superpozice a kvantového měření, které jsou základem kvantové teorie.

Diskuse o vlnově-částicovém dualismu

V této aktivitě studenti dávají do souvislosti výsledky dvojštěrbinového experimentu a vlnově-částicový dualismus. Jejím cílem je poskytnout studentům prostor pro formulování svých myšlenek o vlnově-částicovém dualismu, který pro ně může být poměrně náročný. Jako podklad pro diskusi slouží sada pěti výroků fiktivních studentů (viz obr. 2.6), které obsahují některé běžné nepřesné představy studentů o povaze objektů mikrosvěta.

Úkolem studentů je vybrat výroky, s nimiž souhlasí. U výroků, se kterými nesouhlasí, mají za úkol zdůvodnit, proč jsou nepřesné, případně jak by se daly upravit, aby lépe odpovídaly výsledkům pozorování. Cílem aktivity není „zaškrtnout správnou odpověď“, ale poskytnout prostor

pro formulování a precizování představ o duálním chování objektů mikrosvětla. Jde o výzkumně ověřený typ aktivity známý pod názvem *Concept Cartoons* (viz např. [11]), který rozvíjí schopnost formulovat myšlenky a hledat pro ně argumenty. Možnost diskutovat o výrocích fiktivních postav namísto svých vlastních výroků či výroků spolužáků snižuje strach vyjadřovat názory, proto je pro toto téma velmi vhodný.

Kromě promítnutí znění všech výroků je vhodné každé skupině rozdat i vytištěnou verzi, do níž si zaznamenává své odpovědi. Poskytneme studentům dostatečný čas pro diskusi (cca 5–10 min) a pak necháme skupiny vybrat výroky, s nimiž souhlasí a společně je okomentujeme. Efektivním způsobem, jak nechat skupiny odpovídat, je zvedání hlasovacích karet s písmeny A–E, která odpovídají počátečním písmenům jmen fiktivních studentů.

Se kterými výroky studentů souhlasíte? V čem mají pravdu a v čem jsou nepřesné/chybné?

Alice: Elektron má vlnové vlastnosti, protože jsme pozorovali interferenci.

Bořek: Není jisté, jestli má vlnové vlastnosti jeden samotný elektron. Ale když jich skrz dvojštěrbinu pošleme víc najednou, budou spolu interferovat, takže uvidíme interferenční obrazec.

Cyril: Elektron je jasná částice, má přece na stínítku bodovou stopu.

Dorka: Když elektron prochází štěrbinami, je víc jako vlna, protože vytváří interferenci, ale když dopadá na stínítko, stane se částicí.

Elvis: Nejde říct, jestli je elektron vlna nebo částice. Trochu nám připomíná svým chováním obojí, ale není to ani jedno z toho. Je to prostě elektron.

Obr. 2.6: Výroky fiktivních studentů o vlnově-částicovém dualismu.

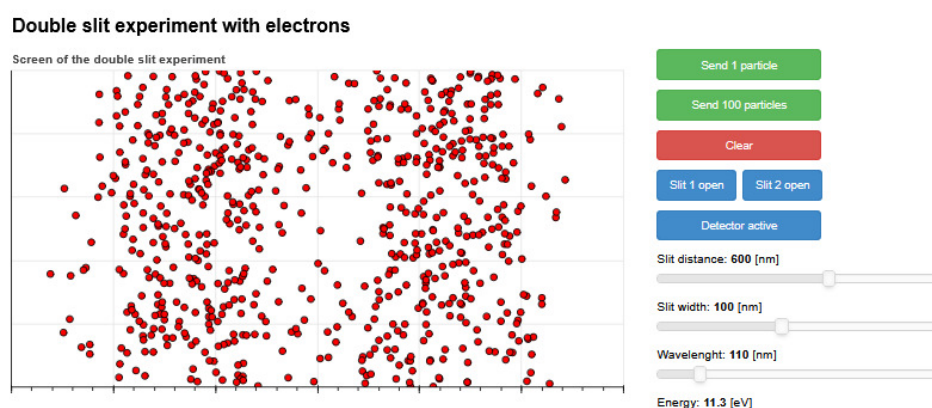
- ✓ **Alice** – Interference poukazuje na vlnové vlastnosti elektronu. Na druhou stranu jej ale nelze považovat pouze za vlnění, protože vykazuje i jiné vlastnosti, které vlnění postrádá.
- ✗ **Bořek** – Tato odpověď poukazuje na typickou představu studentů, že interference je „kolektivní jev“ způsobený „několika elektronovými vlnami“. Je vhodné znova upozornit na to, že se vlnové chování v podobě interferenčního obrazce objevilo i přes to, že jsme elektrony posílali skrz dvojštěrbinu po jednom. Vlnové vlastnosti proto náleží každému jednotlivému elektronu.
- ✗ **Cyril** – Elektron sice má některé vlastnosti typické pro částice (např. bodovost stopy), ale vykazuje i vlnové vlastnosti, proto jej nelze považovat jen za klasickou částici.
- ✓ **Dorka** – V této odpovědi je přítomen náznak myšlenky redukce stavu elektronu při měření polohy, která bude podrobněji rozebrána v další části hodiny. Jde sice zatím o vágní formulaci, ale vzhledem k možnostem středoškolského popisu poměrně odpovídající.
- ✓ **Elvis** – Poslední výrok naráží na umělou snahu zařadit elektron do jedné z kategorií „klasická částice“ nebo „vlnění“ a na neoddelitelnost jeho „vlnové“ a „částicové“ povahy.

V závěrečném shrnutí můžeme ještě jednou zdůraznit myšlenku, již jsme toto téma otevřeli: že naše pokusy přirovnávat chování objektů mikrosvětla k chování klasických objektů nám mohou někdy pomoci, ale mnohem častěji nás mohou zmást. Proto je praktičtější přijmout, že objekty mikrosvětla se řídí jinými pravidly, než jsme zvyklí.

Dvojštěrbinový experiment s detektorem

Nyní se podíváme, co se stane, když ve dvojštěrbinovém experimentu zapneme detektor, který zaznamenává, kterou štěrbinou elektron prošel. Studenti se často ptají, jak by takový detektor vypadal reálně. Podle Feynmanova myšlenkového experimentu lze pro detekci využít např. laser o velmi nízké intenzitě, který vysílá jednotlivé fotony (což je dnes v praxi realizovatelné). Foton interaguje s elektronem a detektor zaznamená záblesk poblíž jedné či druhé štěrbiny.

K ukázce využijeme aplet v nastavení (3): ponecháme obě štěrbiny otevřené a zapneme detektor. Můžeme studenty nechat hádat, jaký obrazec se na stínítku objeví. Se zapnutým detektorem se na stínítku objeví stejný obrazec, jako když dvojštěrbinou procházely kuličky (obr. 2.7), zatímco bez detektoru se objeví interference, jako když procházelo vlnění. Znamená to, že detektor ovlivní, jestli se elektron chová jako vlna nebo jako částice? To je krajně podivné. Zdá se, že v mikrosvětě platí jiná pravidla, než na jaká jsme zvyklí z našeho běžného světa. V následujících aktivitách si je zkusíme přiblížit.



Obr. 2.7: Aplet zobrazující dvojštěrbinový experiment s elektrony – s detektorem [17].

Princip superpozice a kvantové měření

Základními principy, na kterých stojí současná kvantová fyzika, je princip superpozice, a kvantové měření a jeho náhodný charakter. Jde o abstraktní pojmy, ale ze zkušenosti jsou jim schopni porozumět i středoškolští studenti. Nejprve tyto principy přiblížíme pomocí hry kvantové piškvorky a teprve na základě zkušenosti ze hry precizujeme formulaci těchto principů.

Kvantové piškvorky

Kvantové piškvorky⁴ jsou obdobu klasických piškvorek na hracím plánu 3×3 , kde lze navíc umisťovat kameny, které jsou v superpozici dvou polí a jejich poloha se určuje kvantovým měřením – hodem kostkou.

Hru lze uvést reálným příkladem, kde se pracuje s diskrétními stavy polohy a principem superpozice – tzv. „kvantovými tečkami“: Poloha částice (elektronu) v některých materiálech (např. krystalech) není libovolná, ale je omezená na určité malé oblasti, které jsou od sebe navzájem oddělené – tzv. „kvantové tečky“. Např. v krystalech jsou elektrony vázány k atomům v iontové mříži. Elektron tak má mnoho míst, v nichž se může nacházet – může být nalezen u kteréhokoli z atomů. Obrázek 2.8 ukazuje snímek z elektronového mikroskopu zobrazující atomy hliníku na povrchu krystalu arsenidu galia (GaAs). Zjednodušením této situace v rovině bude hrací plán pro hru kvantové piškvorky, kdy budeme uvažovat mřížku 3×3 . Každé políčko

⁴Původním autorem hry je Allan Goff [15].

představuje malou oblast v okolí atomu, kde může být elektron nalezen. Naše částice tak má 9 možných stavů polohy (políček), kde se může nacházet. Pro jednoduchost budeme ve hře kombinovat (superponovat) polohu pouze na dvou políčkách, ačkoli reálná částice žádné takové omezení nemá.

Pravidla hry: Hrají proti sobě dva hráči, ale lze hrát i ve skupinách 3–4 studentů. Každá skupina dostane sadu hracích kamenů, hrací plán 3×3 a hrací kostku (případně minci). Hráči se střídají v umisťování kamenů na hrací pole 3×3. Vyhrává ten, kdo jako první získá tři kameny v řadě, ve sloupci nebo na diagonále.

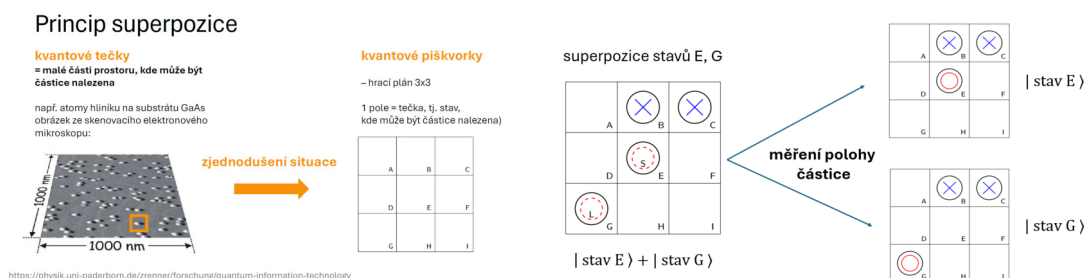
Ve hře jsou dva typy kamenů: klasické kameny mají vždy jednoznačnou polohu – tj. nacházejí se na tom políčku, kam jsme je umístili (stejně jako v běžných piškvorkách). Tyto kameny mají nečárkované označení křížku nebo kolečka $\otimes$ / $\odot$. Oproti běžným piškvorkám může každý hráč umístit také kámen, který je ve stavu superpozice dvou políček – má stejnou pravděpodobnost být nalezen na jednom i na druhém políčku. Takto superponovaný kámen je znázorněn dvojicí žetonů s čárkovaným označením křížku nebo kolečka $\otimes$ / $\odot$ a umisťujeme ho na dvě různá políčka. Jde o superpozici dvou možných poloh se stejnou váhou.

O tom, na kterém poli se kámen nakonec bude nacházet, rozhodne po zaplnění celého hracího plánu náhoda – např. hod kostkou nebo mincí, což znázorňuje kvantové měření. Kvantové měření provádíme až po zaplnění celého hracího plánu postupně pro všechny superponované kameny (tj. dvojice čárkovaných žetonů). Před měřením je potřeba určit, kterou dvojici čárkovaných žetonů zrovna vyhodnocujeme. Žetony představující superponovaný kámen mají označení S (sudá), nebo L (lichá), aby bylo při hodu kostkou možné rozhodnout, který stav je výsledný. Po provedení měření se superponovaný kámen nahradí klasickým kamenem s jednoznačnou hodnotou polohy (nečárkovaným žetonem) a oba čárkované žetony se vrací do zásoby hráče. Měření provádíme tak dlouho, dokud na hrací ploše zbývají kameny v superpozici, pak hra pokračuje umisťováním dalších kamenů jako před tím.

Hráči si mohou zvolit, jestli budou v daném tahu umisťovat klasický nebo superponovaný kámen. Každý hráč má k dispozici dva kameny, které umožňují superpozici, tj. dvě dvojice čárkovaných žetonů, které jsou od sebe odlišeny barvou, aby bylo vidět, které dva žetony představují jeden kámen v superpozici dvou stavů.

Limity modelu: Je vhodné studenty upozornit na limity této analogie. Zejména na skutečnost, že v superpozici může být i více stavů než dva, jako tomu bylo ve hře. Superponovat lze také jiné stavy než stavy polohy, např. stavy s různou energií (odpovídající energetickým hladinám v atomu). Díky jazykové podobnosti mohou studenti mylně pochopit superpozici jako „superpozici“ a místo kombinace stavů ji chápat jako nějakou výjimečnou polohu v prostoru, např. polohu s největší pravděpodobností výskytu.

Na obrázku 2.10 umístil hráč hrající za křížky superponovaný kámen, který je znázorněn



Obr. 2.8: Kvantové tečky – motivace ke hře Obr. 2.9: Měření polohy hracího kamene. kvantové piškvorky.



Obr. 2.10: Hra kvantové piškvorky.

dvěma žetony s čárkováným křížkem. Pokud padne na kostce sudé číslo, bude výsledným stavem po měření poloha, kde se nachází žeton označený S, což by zde vedlo k vítězství hráče hrajícího za křížky. Pokud by padlo liché číslo, výsledným stavem by byla poloha žetonu s označením L.

Při vysvětlování pravidel názorně předvedeme průběh kvantového měření, kdy je z obou možností v superpozici náhodně vybrána pouze jedna. Superpozice je díky měření zrušena (dojde k tzv. *redukci stavu*) a kámen přejde do stavu s jasně určenou polohou, což na hracím plánu znázorníme tak, že nahradíme dvojici čárkovaných žetonů jedním nečárkovaným kamenem. Můžeme použít např. zvětšený model hracích kamenů s magnetickou fólií, které umísťujeme na hrací plán načrtnutý na tabuli. Ve chvíli, kdy studenti pochopí, jak provést na hracím plánu měření, již většinou hra probíhá bezproblémově.

Vysvětlení pravidel zabere cca 10 min, na hru samotnou postačí 10 min a závěrečných 5 min můžeme věnovat shrnutí, ve kterém vyzveme studenty, aby se pokusili vlastními slovy popsat, co znamená, když je částice v superpozici dvou stavů polohy a jak měření ovlivní stav částice.

Formulace základních principů

Na základě odpovědí studentů zformulujeme dva základní principy kvantové fyziky:

1. Princip superpozice: Pokud se částice může nacházet ve stavu A a ve stavu B, pak se může nacházet i v jejich libovolné kombinaci. V této kombinaci může být každý stav zastoupen různou měrou. Takovému kombinovanému stavu říkáme *superponovaný stav* nebo *superpozice*. Obecně může jít o kombinaci libovolného množství stavů.

2. Kvantové měření: Je-li částice v superponovaném stavu a provedeme na ní měření určité fyzikální veličiny, dojde k redukci superpozice. Částice přejde do jednoho konkrétního stavu⁵ z původní kombinace a tím je jasně určena i naměřená hodnota. Pravděpodobnost, že naměříme konkrétní hodnotu a částice přejde do příslušného stavu, je určena tím, jak je daný stav zastoupen v původním superponovaném stavu.

Pokud jde o pokročilejší studenty, můžeme jim přiblížit, že jde o lineární kombinaci a sčítání obdobné jako je sčítání vektorů. V tomto případě značíme vektory místo šipky jinými symboly, kam se snáze píše označení stavu, např. $|\text{stav A}\rangle$, $|\text{částice se nachází na poli A}\rangle$, či jen $|A\rangle$ apod.

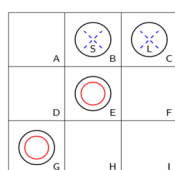
⁵V kvantové fyzice se takovému stavu říká *stav s ostrou hodnotou dané veličiny*, zde o něm jednodušeji mluvíme jako o *stavu s jasnou/jasně určenou hodnotou*.

3. hodina: Základní principy kvantové fyziky (pokračování)

Úvod – opakování principu superpozice a kvantového měření

Na začátku hodiny společně připomeneme princip superpozice a kvantové měření na příkladu hry kvantové piškvorky. Pro ověření pochopení zařadíme dvě úvodní otázky (obr. 2.11). Studenti mají za úkol vybrat správné odpovědi, odpovídají všichni najednou např. pomocí hlasovacích karet. Pokud se odpovědi studentů různí, můžeme je vyzvat, aby své odpovědi prodiskutovali se spolužáky, kteří zvolili jinou odpověď, nebo můžeme odpovědi rovnou okomentovat.

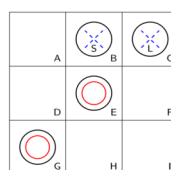
Na kterém políčku se nachází kámen hráče hrajícího za křížky?



- A) Má stejnou možnost být nalezen na poli B i C, ale dokud nezměřím polohu, nemůžu to určit
- B) Na poli B
- C) Na poli C
- D) Ani na jednom z nich
- E) V superpozici polí B, C
- F) Když se zároveň podívám na pole B a C, kámen najdu na obou z nich

(a) Úloha 1.

V jakém stavu bude kámen hráče hrajícího za křížky, poté, co změříme polohu kamene?



- A) Nachází se na poli A
- B) Nachází se na poli B
- C) Nachází se na poli C
- D) Nachází se na obou polích B, C zároveň
- E) Nachází se na poli A, nebo na poli B, ale nelze předem určit, na kterém

(b) Úloha 2.

Obr. 2.11: Konceptuální otázky k principu superpozice.

Řešení a komentář k úlohám:

Úloha 1: Na kterém políčku se nachází kámen hráče hrajícího za křížky?

Odpovědi A, E popisují situaci na hracím plánu nejlépe. Možnost E používá přímo pojem superpozice, možnost A jinými slovy opisuje totéž. Odpověď D také můžeme do jisté míry považovat za správnou, protože dokud neprovedeme měření polohy, poloha kamene nemá jasnou hodnotu. Nelze proto říct, že by se kámen na některém konkrétním políčku nacházel a my jeho polohu „jen neznali“.

Možnosti B a C nejsou správné, protože dokud nebylo provedeno měření, kámen se nenachází ani na poli B, ani na poli C – jeho poloha zatím nemá jasně danou hodnotu. Možnost F poukazuje na představu, že superpozice znamená, že se kámen fyzicky nachází na obou políčkách najednou. Toto vyjádření se pro superpozici často používá, protože je v našem jazyce nejbližší představitelnou analogií, ale není přesné. Superpozice vyjadřuje pouze možnost, že kámen může být nalezen na jednom z těchto políček, ale po provedení měření se realizuje pouze jedna z možností, nikoli obě najednou.

Úloha 2: V jakém stavu bude kámen hráče hrajícího za křížky poté, co změříme polohu kamene?

Nejlépe vystihuje situaci odpověď E: Kámen se může nacházet na poli A, nebo B, ale výsledek měření nelze předem určit, protože je čistě náhodný. Za správné lze považovat také odpovědi, které zahrnují možné stavy po změření polohy kamene, tj. B, C. Možnost A není správná, protože pole A nebylo zastoupeno v počáteční superpozici. Kámen se proto po změření polohy nemůže na poli A nacházet. Správné není ani odpověď D, protože po změření polohy kamene proběhne redukce superpozice a po měření se kámen nachází na jednom z polí B, nebo C, nikoli na obou zároveň.

Kvantové lodě

Hra kvantové lodě rozšiřuje princip superpozice na více než dva stavy, navíc mohou mít jednotlivé stavy v superpozici různou pravděpodobnost. Poukazuje na statistický charakter kvantového měření, který musí brát v úvahu kvantové počítače. Je také přirozenou cestou k zavedení hustoty pravděpodobnosti. V rozšíření (které je ale nad rámec tohoto materiálu) lze aktivitu také použít pro představení významu vlnové funkce.

Pravidla hry: Kvantové lodě jsou obdobou známé hry o odhalování pozice lodi druhého hráče. Hraje se na plánu 3×3 s políčky označenými písmeny. Cílem hry je pomocí kvantového měření odhalit počáteční stav fiktivní částice (kvantové lodě), resp. odhadnout rozložení pravděpodobnosti nalezení kvantové lodě na různých polích). Superponovaný stav kvantové lodě zde není omezen pouze na dva stavy jako u kvantových piškvorek, ale je možno kombinovat všech 9 poloh, a to s různou vahou.

Učitel připraví „kvantovou loď v neznámém superponovaném stavu“ – do pytlíčku namíchá žetony označené písmeny tak, že každý žeton odpovídá např. 10% pravděpodobnosti nalezení částice na daném poli. Celková pravděpodobnost nalezení částice na plánu musí být 100%, v pytlíčku tedy bude celkem 10 žetonů. V případě stavu na obrázku 2.12 by pytlíček obsahoval 6 žetonů D, 2 žetony I, po jenom žetonu E a G, zatímco žetony A, B, C, F, H by v pytlíčku nebyly vůbec.

A	B	C			
D	E	F	stav D⟩	... 60 %	žeton D ... 6×
			stav E⟩	... 10 %	žeton E ... 1×
			stav G⟩	... 20 %	žeton G ... 2×
G	H	I	stav I⟩	... 10 %	žeton I ... 1×

Obr. 2.12: Znázornění superpozice více stavů s různou vahou pomocí hry kvantové lodě.

Každá skupina dostane hrací plán s políčky 3×3 označenými písmeny, pytlíček s namíchanými žetony a čtverečky barevné fólie. Měření polohy kvantové lodě probíhá tak, že studenti vylosují z pytlíčku jeden žeton, aniž by se do pytlíčku dívali. Vylosují-li žeton A, byla loď naměřena na poli A, čímž došlo k redukci původní superpozice na jeden konkrétní stav – pole A. Můžeme si to představit tak, že po měření losovací pytlíček s ostatními žetony představující superponovaný stav „zmizel“ a zbyl z něj pouze jeden vylosovaný žeton, který představuje polohu kvantové lodě po měření. Před novým měřením je potřeba žeton vrátit zpátky do pytlíčku. Upozorníme studenty, že kvůli redukci stavu po měření musíme změřenou kvantovou loď „zahodit“ a pro měření použít „novou loď“ ve stejném stavu, jako byla ta původní – tj. se stejným rozdělením žetonů v pytlíčku. Pokud bychom po měření vylosovaný žeton do pytlíčku nevrátili, nové losování bychom prováděli na jiném rozdělení pravděpodobnosti, než měl původní stav.

Své měření si studenti zapíší nebo ho mohou zaznamenat na hrací plán tak, že položí čtvereček průhledné barevné fólie na dané pole. Při položení více fólií na sebe se pole jeví jako tmavší a přirozeně se tak buduje grafické znázornění rozložení pravděpodobnosti.

Studenti se často ptají, kolik měření mají provést. Vyzveme je, ať odhadnou, kolik měření stačí k tomu, aby dostatečně přesně určili nebo alespoň odhadli pravděpodobnost nalezení částice na jednotlivých políčkách. Často sami dojdou k tomu, že by potřebovali nekonečně mnoho měření, ale pro odhad pravděpodobnosti jich postačí několik desítek (během 10 minut studenti typicky zvládnou provést 20–30 měření).

Diskuse výsledků měření: Na závěr porovnáme odhady pravděpodobnosti nalezení lodi na jednotlivých políčkách u různých skupin studentů – buď číselně, nebo jen kvalitativně (na kterých

políčkách je pravděpodobnost nalezení lodě vysoká a na kterých nízká). Pokud všechny skupiny dostaly kvantovou loď ve stejném superponovaném stavu, můžeme výsledky měření jednotlivých skupin zapsat dohromady na tabuli nebo do tabulky v Excelu. Zvýšíme tím počet měření, zpřesníme odhad pravděpodobnosti a zároveň tím poukážeme na statistický charakter kvantového měření, který později využijeme pro přiblížení principu funkce kvantových počítačů.

Limity modelu: Podobně jako u kvantových piškvrek studenty upozorníme, že přiblížení pomocí kvantových lodí má svá omezení. Například, po provedení měření se superponovaný stav znázorněný pytlíčkem se žetony redukuje pouze na jeden naměřený stav s jasně danou hodnotou. To by mělo znamenat, že po měření pytlíček „zmizí“ a zůstane pouze vytažený žeton.



Obr. 2.13: Hra kvantové lodě.

Ověřovací otázky k principu superpozice a kvantovému měření:

Pro ověření pochopení zařadíme úlohy 1–5 popsané níže. Studenti mohou vybírat správné odpovědi na otázky opět pomocí hlasovacích karet.

Obrázek ukazuje počáteční stav kvantové lodě. Vyberte všechny možnosti, které zobrazují **možný stav po změření polohy lodě**.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

 A)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

 B)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

 C)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

D)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

 E)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

 F)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Obr. 2.14: Úloha 1

Který výsledek měření je **nejpravděpodobnější**?

A	B	C
D	E	F
G	H	I

 A)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

 B)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

 C)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

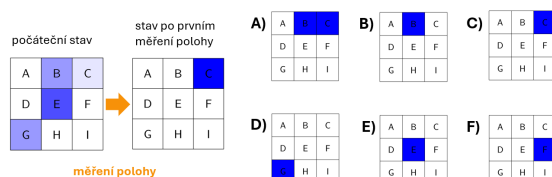
D) Všechny výsledky B, C, E, G jsou stejně pravděpodobné
 E)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Obr. 2.15: Úloha 2

- Úloha 3: Provedli jsme **jedno měření polohy lodě**. Jakou informaci jsme tím získali o zastoupení stavů v původní superpozici?
- Úloha 4: Kolik měření bychom museli provést, abychom přesně určili zastoupení jednotlivých stavů v „**původní superpozici**“ kvantové lodě?

Změřili jsme polohu kvantové lodě a **naměřili jsme výsledek C**. Na této lodi (která je nyní ve stavu C) **měření polohy ještě jednou zopakujeme**. Jaké jsou možné výsledky měření?



Obr. 2.16: Úloha 5

Řešení a komentář k úlohám:

Úloha 1: Obrázek ukazuje počáteční stav kvantové lodě. Vyberte všechny možnosti, které zobrazují **možný stav po změření polohy lodě**.

Správné odpovědi jsou B, C, D, E – tj. pole, která jsou zastoupena v původní superpozici. Kvantová loď nemůže být naměřena na poli F, protože se toto pole nenachází v původní superpozici. Odpověď A není správně, protože po změření polohy se částice nachází už jen na jednom poli – buď B, nebo C.

Upozorníme studenty, že i když jsme si výsledky měření zaznamenávali pomocí fólií skládaných na sebe, po změření polohy došlo k redukci stavu a kvantová loď přešla do stavu, kdy měla jasně danou polohu na konkrétním políčku a její superpozice byla zrušena. V našem případě by to znamenalo, že pytlíček s žetony „zmizel“.

Úloha 2: Který výsledek měření je **nejpravděpodobnější**?

Nejpravděpodobnější výsledek měření polohy kvantové lodě je pole E, které je nejtmavší, což znamená, že je v superponovaném stavu zastoupeno s největší vahou.

Úloha 3: Provedli jsme **jedno měření polohy lodě**. Jakou informaci jsme tím získali o zastoupení stavů v původní superpozici?

Jedno měření dává pouze jedinou informaci – že dané pole je v superpozici zastoupeno. Nelze ale říct, s jakou vahou, tj. o pravděpodobnosti naměření tohoto výsledku nevíme nic. Rozdělení pravděpodobnosti můžeme odhadnout teprve na základě mnoha měření.

Úloha 4: Kolik měření bychom museli provést, abychom přesně určili zastoupení jednotlivých stavů v „původní superpozici“ **kvantové lodě**?

Pro přesné zastoupení jednotlivých stavů v superpozici, tj. rozdělení pravděpodobnosti mezi tyto stavy, by bylo potřeba nekonečně mnoho měření. Zákon velkých čísel říká, že se pro dostatečně velký počet měření relativní četnost jednotlivých výsledků blíží pravděpodobnosti jejich naměření. Díky tomu můžeme podle požadované přesnosti a množství stavů zkoumaného systému stanovit potřebný počet měření. V našem případě postačí vyšší desítky až nižší stovky měření, které můžeme ve třídě snadno získat tak, že vyhodnotíme měření všech skupin dohromady.

Úloha 5: Změřili jsme polohu kvantové lodě a **naměřili jsme výsledek C**. Na této lodi (která je nyní ve stavu C) **měření polohy ještě jednou zopakujeme**. Jaké jsou možné výsledky měření?

Tato úloha ověřuje pochopení redukce stavu kvantovým měřením. První měření polohy způsobí, že nastane jedna z možností B, C, E, G, např. pole C, jak ukazuje obr. 2.16. Dojde k redukci superpozice, takže už poloha lodi není kombinací více možností, ale její poloha je jasně daná. Druhé měření polohy provedeme na **kvantové lodi v tomto stavu**, která už prošla předchozím

měření, nikoli na „nové lodi“ v původním superponovaném stavu, jako jsme to dělali v předchozích případech. Protože už poloha lodi není kombinací více polí, ale v této „kombinaci“ už je jen pole C, bude výsledkem druhého (a každého dalšího) měření polohy zase pole C.

Návrat ke dvojštěrbinovému experimentu

Nyní se pokusíme duální chování elektronů ve dvojštěrbinovém experimentu vysvětlit pomocí kvantového měření a principu superpozice.

V případě, kdy jsme pozorovali interferenci, byly obě štěrby otevřené. Elektrony prolétající štěrbinou tedy byly v superpozici dvou stavů „elektron prošel štěrbinou A“ a „elektron prošel štěrbinou B“. Můžeme si představit, že každý stav odpovídá jedné „vlně“ procházející štěrbinami, které spolu interferují a na stínítku pozorujeme interferenční obrazec (obr. 2.17 vlevo).

Když jsme zapnuli detektor, došlo díky kvantovému měření k redukci superpozice na jeden konkrétní stav a po měření byl elektron buď ve stavu „prošel štěrbinou A“, nebo „prošel štěrbinou B“. Takový stav odpovídá už pouze jedné „vlně“, takže se interference neobjeví a na stínítku pozorujeme dvě oddělené stopy (obr. 2.17 vpravo). Jedna stopa odpovídá elektronům prošlým štěrbinou A (modrá), druhá elektronům prošlým štěrbinou B (zelená). K symbolickému zápisu lze použít Diracův formalismus užitý již dříve, který je při použití jako „symbolu označujícího stav“ srozumitelný i pro středoškolské studenty.

Mezi studenty může padnout dotaz, jak to, že se výše zmíněná „vlna“ na stínítku zobrazí jako bodová stopa. Na stínítku totiž probíhá druhé kvantové měření, které superpozici mnoha různých míst dopadu elektronu redukuje na jedno konkrétní místo na stínítku (tuto superpozici určuje zmíněná „vlna“). Stínítko bychom si podobně jako hrací pole pro kvantové lodě mohli rozdělit na velký počet malých oblastí, z nichž každá má určitou pravděpodobnost, že na ni elektron dopadne. V případě experimentu bez detektoru má rozložení pravděpodobnosti dopadu elektronu na stínítku podobu interferenčního obrazce. Detektor u dvojštěrbiny pozmění stav elektronu, takže se změní i výsledný obrazec na stínítku.

Princip funkce kvantových počítačů

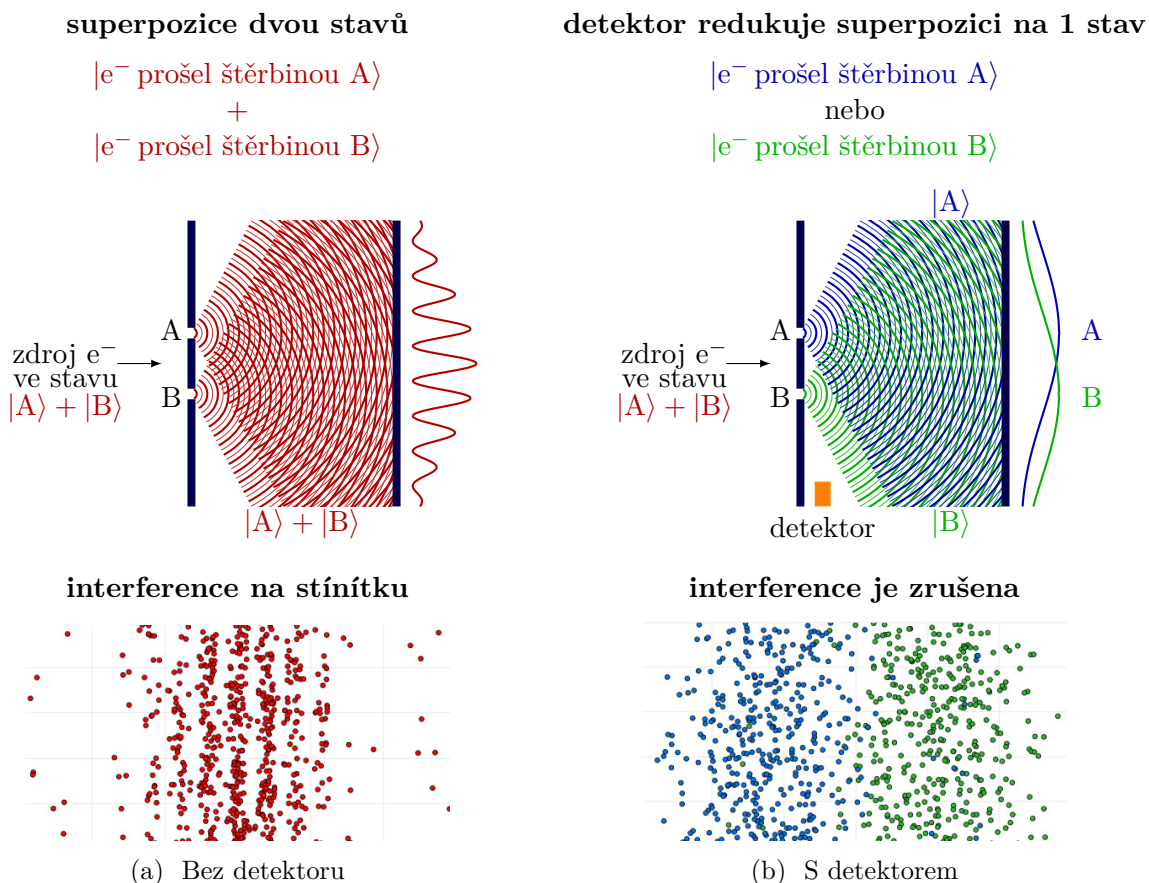
Po absolvování předchozích aktivit mají studenti dost znalostí, aby porozuměli základní myšlence toho, jak princip superpozice využívají kvantové počítače. Můžeme využít anglické video⁶ o Groverově vyhledávacím algoritmu. Cílem není podrobně představit princip algoritmu, ale spíše ukázat, jak se v něm projeví kvantové chování a motivovat k případnému dalšímu studiu.

Groverův algoritmus slouží k vyhledávání položky s požadovanými vlastnostmi v neseřtředěném seznamu, což lze využít při řešení některých optimalizačních problémů – např. nalezení nejkratší trasy, nalezení nejefektivnějších parametrů výroby atd. Na rozdíl od klasických počítačů, které procházejí jednotlivé položky jednu po druhé, mohou kvantové počítače díky principu superpozice v jistém slova smyslu „zkoušet všechny možnosti najednou“.

Částice (qubity), na nichž algoritmus probíhá, jsou na začátku uvedeny do superponovaného stavu, který obsahuje všechny položky v seznamu zastoupené stejnou vahou. Pomocí vhodně navrženého kvantového programu – tj. vhodného pořadí operací, které s qubity provádíme – měníme váhu jednotlivých stavů v superpozici. Program musí být navržen tak, aby se posilovalo zastoupení stavů odpovídající položkám, které hledáme. Pak provedeme měření stavu qubitů a zaznamenáme si výsledek. Následně uvedeme qubity opět do počátečního stavu a celý postup zopakujeme. Výsledek měření může být tentokrát jiný. Celý postup opakujeme mnohokrát, při každém opakování můžeme dostávat různé výsledky. Stav s nejvyšší pravděpodobností je hledaný stav.

Ve videu je použita analogie kvantových mravenců, kteří hledají cestu z bludiště. Jednotliví mravenci, resp. cesta, po které v bludišti chodí, představují prohledávané stavy qubitů, lákání

⁶Dotupné na: <https://www.youtube.com/watch?v=eGYuTuTxoJE>



Obr. 2.17: Vysvětlení dvojštěrbinového experimentu z pohledu principu superpozice a kvantového měření.

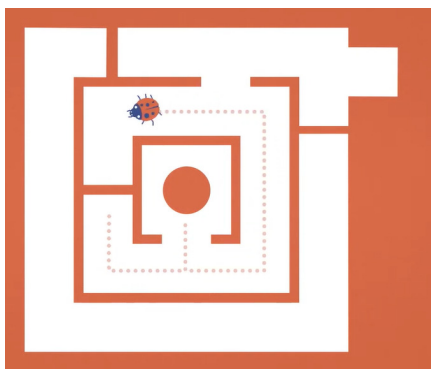
mravenců na cukr pak představuje provádění kvantového algoritmu. Výběr jednoho mravence zkoušejícího konkrétní cestu odpovídá měření. Pokud byl program navržen tak, že po jeho provedení většina mravenců s velkou pravděpodobností jde po cestě vedoucí ven z bludiště, je velká šance, že výběrem náhodného mravence cestu ven nalezneme. Program provedeme mnohokrát a pokaždé si náhodně vybereme jednoho mravence a jeho cestu. Ta cesta, kterou nám ukázalo nejvíce mravenců, je velmi pravděpodobně naše hledaná cesta ven z bludiště.

Na tomto příkladu je vidět výhoda i nevýhoda kvantových počítačů – díky superpozici dokážou zvládnout i úlohy, jejichž obtížnost rychle roste s počtem položek v seznamu. Naopak nevýhodou je, že zatímco klasický algoritmus stačí provést jednou, abychom dostali správný výsledek, kvantový algoritmus musíme provést mnohokrát. Důvodem je náhodnost kvantových jevů. Po mnohanásobném provedení algoritmu a následném měření stavu se podíváme, který výsledek byl nejčastější, a teprve ten prohlásíme za konečný. Počet opakování je ale pro konkrétní algoritmus a požadovanou přesnost stále stejný, i když roste počet možností, mezi nimiž vyhledáváme. Od určitého počtu možností proto převáží výhody kvantového algoritmu nad klasickými. Více informací k videu se lze dočíst v článku [20].

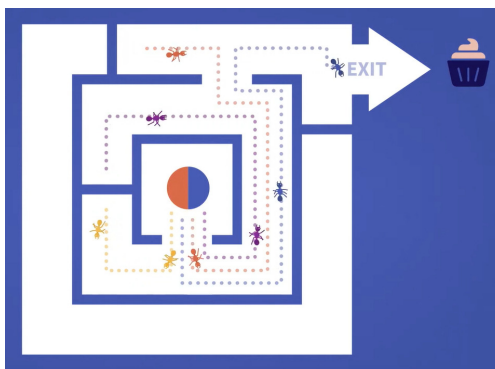
2.5 Modifikace a návaznost na jiné moduly:

Modul 2 nemusí navazovat na historický úvod do kvantové fyziky uvedený v modulu 1, lze jím výuku kvantové fyziky začít. Pro vysvětlení vlnově-částicového dualismu je výhodné, pokud jsou studenti seznámeni s vlnovými vlastnostmi světla, v opačném případě je potřeba věnovat více času částem zaměřeným na interferenci.

Pokud nechceme modulu věnovat celé tři hodiny, lze některé části vynechat (např. omezit se



(a) Klasické vyhledávání



(b) Kvantové vyhledávání

Obr. 2.18: Jak využívají princip superpozice kvantové počítače – metafora s bludištěm a kvantovými mravenci [7] (stopáž 0:40–3:10).

pouze na superpozici dvou stavů). Vybrané aktivity lze zařadit úplně izolovaně pro zpestření výuky (kvantové piškvorky nebo kvantové lodě).

Modul 3: Nekompatibilní veličiny

3.1 Cíle:

- Student uvede příklad dvou nekompatibilních veličin a vysvětlí, jak měření jedné veličiny ovlivňuje hodnotu druhé veličiny, přičemž použije reálné veličiny nebo vhodný model.

3.2 Časový plán:

Modul 3 – hodina 1/1		Čas
Úvod		5 min
Nekompatibilní veličiny	• kvantová karta	15 min
Polarizace	• skupinová práce s polarizačními filtry a úkoly v pracovním listu: • pozorování intenzity světla při průchodu polarizačními filtry • polarizace jednoho fotonu, pravděpodobnost průchodu jednoho fotonu filtrem • shrnutí	25 min

3.3 Pomůcky:

- Demonstrační kvantová karta a hrací kostka
- Menší kvantové karty a hrací kostky pro studenty
- Demonstrační polarizační filtry
- Polarizační filtry pro studenty (3 pro každou skupinu)
- Pracovní list *Nekompatibilní veličiny – polarizace fotonů*

3.4 Průběh výuky:

Úvod

V této hodině představíme studentům vlastnost mikrosvěta, která nemá v klasickém světě obdoby: existenci veličin, jejichž hodnoty nemohou být přesně dány současně. Nelze je tedy ani současně přesně změřit. Nejde ale o nedostatek informací ani o chybu měření – hodnotu obou veličin není možné současně vůbec přiřadit. Takovým veličinám říkáme tzv. „současně neměřitelné veličiny“ nebo odborně *nekompatibilní veličiny*. Jinými slovy lze tuto vlastnost popsat také tak, že získáním informace o jedné veličině ztrácíme informaci o druhé veličině. Známým příkladem nekompatibilních veličin je poloha částice a její hybnost (resp. souřadnice x a x -ová

složka hybnosti.) Zde se budeme zabývat jednoduššími veličinami, které mohou nabývat pouze dvou hodnot.

Vlastnosti nekompatibilních veličin studentům nejprve ukážeme na modelu kvantové karty a potom přejdeme k reálné veličině – polarizaci fotonů, kterou lze prakticky demonstrovat pomocí polarizačních filtrů.

Kvantová karta

Kvantová karta¹ je fyzická pomůcka, která umožňuje studentům prozkoumat, jak se nekompatibilní veličiny chovají při kvantovém měření. Zároveň studenty přirozeně seznamuje s rolí náhody u kvantového měření a tím, že měření ovlivňuje stav měřeného systému. Lze ji tedy použít i v případě, že jde o první seznámení studentů s touto problematikou. Znázorňuje vlastnosti elektronu a fotonu jako je spin a polarizace, které se chovají stejně jako vlastnosti kvantové karty².

Kvantová karta představuje částici, která má dvě nekompatibilní vlastnosti: líc a rub, z nichž každá může nabývat právě dvou hodnot. Líc může být „dáma“ nebo „král“, rub může být „červený“ nebo „modrý“, jak ukazuje tabulka níže:

Vlastnost	LÍC	RUB
Hodnoty	dáma (Q)	červená
	král (K)	modrá

Na rozdíl od klasických hracích karet, které mají barvu rubu i líce jasně danou zároveň, může být kvantová karta ve zvláštním stavu, kdy má 50% šanci být dáma a 50% šanci být král (viz obr. 3.1a vlevo). Takovému stavu říkáme tzv. *superponovaný stav* nebo *superpozice* těchto dvou možností. Kvantová karta je totiž slepena z rozstřižených hracích karet tak, aby díky různému přehnutí „chlopni“ karta mohla být z lícové strany buď dáma, nebo král, nebo napůl dáma a napůl král (v superpozici těchto dvou stavů) a z rubové strany analogicky červená, nebo modrá, nebo napůl červená a napůl modrá. Obě strany rozložené kvantové karty ukazuje obrázek 3.1b.



(a) Barva líce, resp. rubu v superpozici.



(b) Dvě strany rozložené kvantové karty.

Obr. 3.1: Kvantová karta.

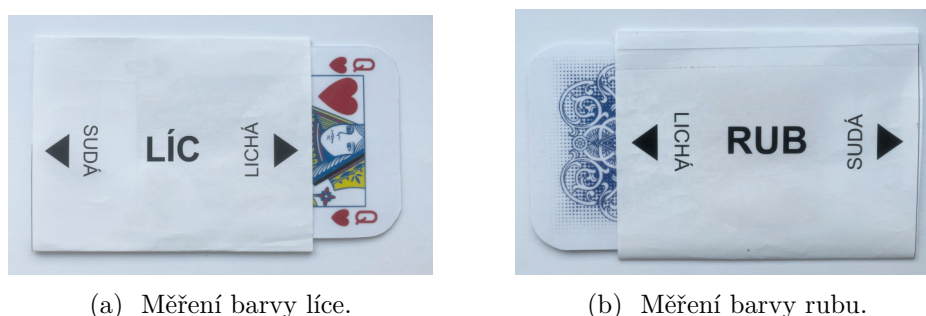
¹Pomůcka je popsána v příspěvku [5] italských autorek Maria Bondoni a Valentina De Renza na konferenci GIREP 2025.

²Jde opravdu o velmi přesnou analogii, formální popis stavů kvantové karty se od popisu spinových stavů elektronu nebo polarizace fotonu liší opravdu pouze názvem.

Měření vlastností kvantové karty

Když chceme zjistit, jaký je líc karty, musíme provést měření. Na demonstrační kvantové kartě studentům předvedeme, jak na ní simulujeme kvantové měření.

Měření provedeme tak, že kartu vsuneme do papírové obálky, aby její strany odpovídaly označení RUB a LÍC na obálce (viz obr. 3.2). Zvolíme si, kterou vlastnost chceme změřit a otočíme obálku touto stranou nahoru. O výsledku měření v kvantové fyzice rozhoduje náhoda – v našem případě hod kostkou. Podle výsledku hodu kostkou povytáhneme kartu z obálky na odpovídající straně dle označení „sudá“ a „lichá“. Hodnota, kterou uvidíme, když kartu trochu povytáhneme, je výsledkem měření. Kdyby karta byla opravdu kvantová, ve chvíli, kdy jsme naměřili např. modrou barvu rubu, by se stala modrou kartou (bez ohledu na to, zda před měřením byla celá modrá, nebo šlo o superpozici modré a červené). Naší papírové pomůcky musíme v případě potřeby barvu změnit ručně. Vytáhneme kartu z obálky a je-li to nutné, překlopíme jednu chlopeň tak, aby měla celá karta modrou barvu. Kartu opět vsuneme do obálky a tím je připravena na další měření.



(a) Měření barvy líce.

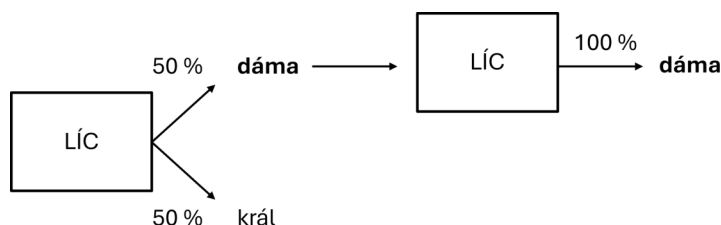
(b) Měření barvy rubu.

Obr. 3.2: Měření vlastností kvantové karty.

Na následujících pokusech si studenti vyzkouší, co se děje při opakovaném měření dvou nekompatibilních veličin (líce a rubu). Každý student dostane vlastní kvantovou kartu s obálkou a hrací kostkou a podle pokynů pomocí ní simuluje kvantové měření příslušné vlastnosti. Statistiku výsledků měření z celé třídy můžeme zapisovat na tabuli.

Měření stejné vlastnosti dvakrát po sobě

Změříme např. líc dvakrát po sobě. Při prvním měření můžeme dostat výsledek „dáma“ nebo „král“ se stejnou pravděpodobností. Předpokládejme, že byla naměřena „dáma“. Při druhém (a každém dalším) měření líce už pokaždé naměříme „dámu“.



Obr. 3.3: Měření líce dvakrát po sobě.

Chceme-li poukázat na statistický charakter měření v kvantové fyzice a na jeho základě odhadnout počáteční stav kvantové karty, musíme nasbírat dostatečný počet měření. Využijeme toho, že máme ve třídě větší počet studentů a každý má svoji kvantovou kartu. Požádáme studenty, aby si připravili svoji kvantovou kartu všichni do stejného počátečního stavu – to znamená do stavu, který odpovídá stavu po změření líce s výsledkem „dáma“. Pak všichni změří líc a vý-

sledky měření zapíšeme na tabuli. V tomto případě není překvapivé, že všichni naměří opět „dámu“.

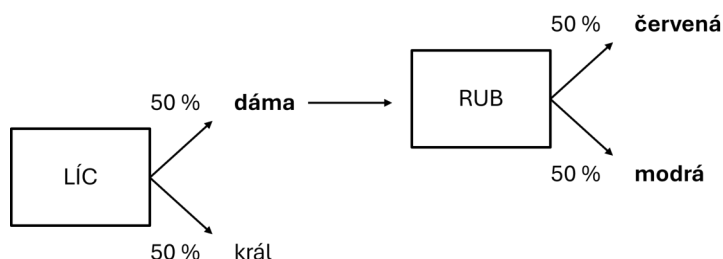
Vidíme, že při opakovaném měření téže vlastnosti dostaneme ve 100 % případů vždy stejný výsledek, jako ukazuje obrázek 3.3. Podmínkou je, že tato měření probíhají hned po sobě a částici (kvantovou kartu) mezitím nic neovlivňuje ani na ní neprobíhá žádné jiné měření. Pokud studenti znají pojem superponovaný stav, můžeme s ním měření kvantové karty propojit: Při prvním měření líce došlo k redukci stavu a případná superpozice možností „dáma“ a „král“ se změnila na stav s jasnou hodnotou „dáma“.

Měření dvou nekompatibilních vlastností

Po předchozím měření líce nyní změříme rub. Přináší nám znalost líce karty nějakou informaci o jejím rubu? Máme-li kvantovou kartu, která má na lícové straně „dámu“, jaký výsledek dostaneme, když změříme její rub?

Každý změří rub na své kvantové kartě, výsledky opět zapíšeme na tabuli. Kvantová karta má stejnou pravděpodobnost být z rubu „červená“ i „modrá“, mezi výsledky by se proto měly objevit obě možnosti, jak znázorňuje obrázek 3.4. Vzhledem k nízkému počtu měření (nižší desítky) nelze očekávat přesný poměr 50:50, zvýšením počtu měření se k němu můžeme přiblížit.

Můžeme udělat závěr, že znalost líce nám nedává žádnou informaci o rubu, protože výsledky měření rubu byly zcela náhodné a oba možné výsledky měření mají stejnou pravděpodobnost.



Obr. 3.4: Měření dvou nekompatibilních vlastností.

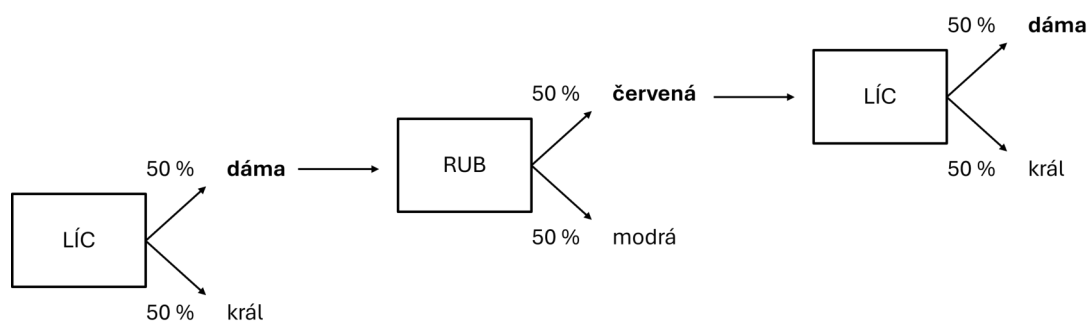
Opakované měření nekompatibilních veličin

Co se stane, když znova změříme líc? Je překvapivé, že mezi možnými výsledky se opět objeví obě hodnoty „dáma“ i „král“, ačkoli po prvním měření měly všechny karty na líci „dámu“. Měření rubu totiž změnilo stav kvantové karty a nastavilo ji opět do kombinovaného (superponovaného) stavu „napůl dáma, napůl král“, takže při následném měření líce můžeme naměřit oba výsledky se stejnou pravděpodobností, jak ukazuje obrázek 3.5. To odporuje naší běžné zkušenosti, že by líc měl zůstat stejný bez ohledu na to, jestli jsme mezitím zkoumali jinou vlastnost kvantové karty. Nekompatibilní veličiny jsou další ukázkou kvantového chování, které je naprosto odlišné od toho, na co jsme zvyklí z našeho světa.

Shrnutí

Shrňme poznatky, které jsme získali o nekompatibilních veličinách:

- Změříme-li stejnou veličinu vícekrát po sobě, dostaneme vždy stejný výsledek.
- Při po sobě jdoucích měřeních dvou nekompatibilních veličin ztrácíme změřením druhé veličiny informaci o hodnotě první veličiny. Výsledky měření druhé veličiny jsou zcela náhodné, obě hodnoty naměříme se stejnou pravděpodobností.



Obr. 3.5: Opakované měření nekompatibilních veličin.

Pokud tuto aktivitu provádíme s menším množstvím studentů (15 a méně), měření veličin v pořadí LÍC–RUB–LÍC několikrát zopakujeme, abychom zvýšili počet měření a přiblížili se tomu, že se oba výsledky měření vyskytují přibližně stejně často. Je potřeba, abychom každou sadu měření začínali ze stejného počátečního stavu kvantové karty. Ukázka zápisu výsledků měření na tabuli je na obrázku 3.6.

① LÍC	Q	K
	15	0
② RUB	Č	M
	6	9
③ LÍC	Q	K
	7	8

Obr. 3.6: Zápis výsledků měření vlastností kvantové karty s 15 studenty.

Výhoda analogie kvantové karty spočívá v tom, že pracuje s vlastnostmi, které jsou pro studenty dobře představitelné, aniž by se narušila exaktnost výkladu. Studenti se tak mohou se současnou neměřitelností dvou nekompatibilních veličin seznámit s využitím jazyka, který je jim blízký. Nejsou při tom zatíženi názvy reálných veličin jako je spin nebo polarizace (resp. průmět spinu, různé směry polarizace), se kterými se dosud nesetkali. Pro přechod od analogie k reálným veličinám stačí změnit názvy veličin a jejich hodnot (možných výsledků měření).

Příklad nekompatibilních veličin – polarizace fotonu

Výše uvedené abstraktní principy nyní demonstrujeme na reálném fyzikálním příkladu nekompatibilních veličin – dvou různých orientacích polarizace fotonu.

Během této části hodiny studenti ve dvojicích či skupinách řeší úkoly v pracovním listu s využitím polarizačních filtrů. Filtry musí mít označen směr polarizace (např. papírovou nálepkou se šipkou), viz obr. 3.7. Není nutné, aby studenti znali polarizaci z optiky, ale může jim to práci s polarizačními filtry usnadnit.

Přechod od kvantové karty k polarizaci

Pokud studenti neznají polarizaci světla, stručně ji představíme pomocí vlnového pohledu na světlo jakožto elektromagnetické záření, které je popsáno vektorem elektrické intenzity a magnetické indukce, které jsou navzájem kolmé a kolmé na směr šíření světla. Polarizace světla je



Obr. 3.7: Polarizační filtry.

dána vektorem elektrické intenzity. Pokud má vektor elektrické intenzity stále stejný směr, jde o *lineárně polarizované světlo*, a tento směr nazýváme *směr polarizace*. Pokud se směr vektoru elektrické intenzity mění zcela náhodně, jde o *nepolarizované světlo*. (Pro jednoduchost zde vynecháváme kruhovou a eliptickou polarizaci, kdy vektor elektrické intenzity opisuje kružnici či elipsu.)

Směr polarizace můžeme přisoudit i jednomu fotonu. Určité orientace polarizace fotonu mají stejné vlastnosti jako líc a rub kvantové karty. Budeme je nazývat *přímá polarizace* (ozn. +) a *šikmá polarizace* (ozn. ×). Stejně jako měly líc a rub dvě možné hodnoty, mají dvě možné hodnoty i obě orientace polarizace. Možné hodnoty přímé polarizace jsou $\uparrow$, $\leftrightarrow$, které jsou navzájem kolmé, podobně pro šikmou polarizaci jsou možné hodnoty $\uparrow$ a $\searrow$. Všechny tyto možné hodnoty budeme souhrnně nazývat *směry polarizace* a budeme je označovat šipkami:

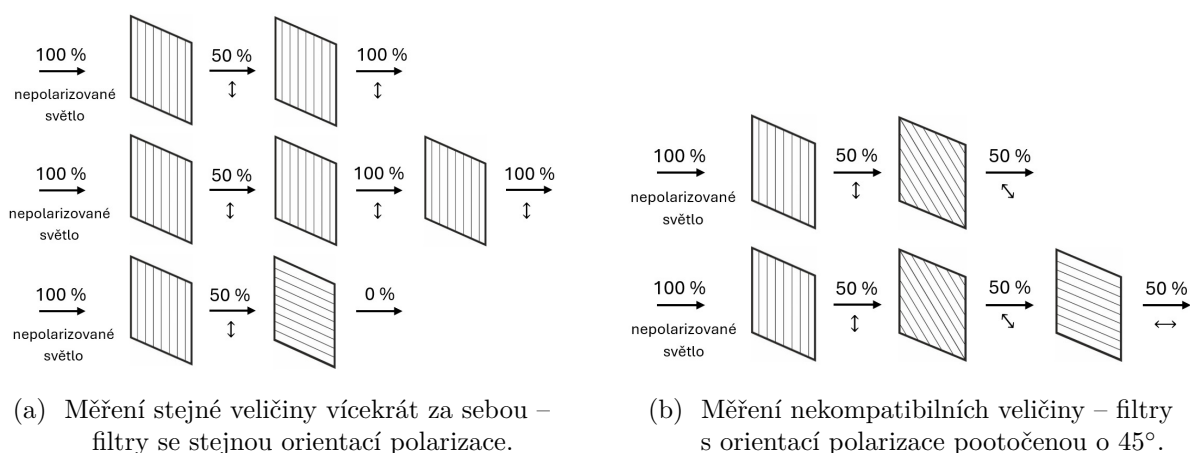
Veličina (orientace polarizace):	Přímá polarizace (+)	Šikmá polarizace (×)
Hodnoty (směry polarizace):	$\leftrightarrow$ $\uparrow$	$\searrow$ $\swarrow$

Měření polarizace polarizačním filtrem

Směr polarizace fotonu měříme polarizačním filtrem. Polarizační filtr je vyroben z materiálu s dlouhými vláknitými molekulami (např. celulózy). Díky této vnitřní struktuře má zvláštní optické vlastnosti: propouští pouze fotony s jedním směrem polarizace, zatímco fotony s kolmým směrem polarizace pohlcuje. Směr polarizace, který daný filtr propouští, je označen žlutou šipkou (viz obr. 3.7). Fotony, které filtrem projdou, mají právě tento směr polarizace.

V našich podmínkách polarizačním filtrem neumíme poslat pouze jeden foton najednou a podívat se, jestli prošel, nebo byl pohlcen (ačkoli ve specializovaných laboratořích to možné je). Našimi filtry světlo prochází jako proud mnoha fotonů najednou. Množství fotonů prošlých filtrem vnímáme jako intenzitu světla procházejícího filtrem.

V první části pracovního listu studenti pracují s polarizačními filtry a pozorují intenzitu prošlého světla. Ve druhé části z těchto pozorování odvodí, jaké by byly výsledky měření, kdyby polarizačními filtry procházel pouze jeden foton.



Obr. 3.8: Řešení úkolu 1 a 2 – pozorování intenzity světla prošlého polarizačními filtry, vyznačeno nad šipkou. Pod šipkou je naznačen směr polarizace světla po průchodu filtrem.

Pozorování intenzity světla

Úkol 1: V úkolu 1 v pracovním listu studenti odhadují intenzitu světla, které projde různě natočenými polarizačními filtry, viz obr. 3.8. Intenzitu odhadují tak, že pozorují, kolik světla prošlo jedním filtrem v porovnání se dvěma či více filtry, tj. „jak se jim filtry jeví tmavé“. Uspořádání filtrů je rozděleno do dvou skupin: první tři situace (obr. 3.8a) představují měření dvou stejných veličin (stejných orientací polarizace), zatímco v situacích na obr. 3.8b měříme nekompatibilní veličiny – přímou a šikmou polarizaci v různém pořadí.

Intenzitu prošlého světla zapisujeme nad šipku za daný filtr. Používáme konvenci, kdy je v případě více filtrů za sebou intenzita světla či podíl fotonů prošlých daným filtrem vztažen k počtu fotonů před vstupem do daného filtru, nikoli k počáteční hodnotě. Díky této konvenci je vždy patrné, jaká část fotonů filtrem projde a jaká část je pohlcena. Předpokládáme, že do prvního filtru vždy vstupuje nepolarizované světlo.

Řešení úkolu 1: V případech filtrů se stejnou orientací polarizace je výsledek měření vždy jednoznačný. Pokud je filtr natočen stejně jako předchozí filtr, propustí všechny fotony, které do něj vstupují (viz první dva případy na obr. 3.8a). V případě zkřížených (navzájem kolmých) filtrů (obr. 3.8a dole) jsou všechny fotony druhým filtrem pohlceny, takže je výstupní intenzita světla nulová. Jde o dvě následná měření přímé polarizace – první filtr měří směr přímé polarizace $\updownarrow$, druhý filtr měří směr přímé polarizace $\leftrightarrow$.

Pokud jsou filtry navzájem pootočený o 45° , jde o měření dvou nekompatibilních veličin – přímé a šikmé polarizace. Když za svisle orientovaný filtr umístíme šikmo natočený filtr jako na obrázku 3.8b nahoře, bude intenzita světla po průchodu druhým filtrem poloviční oproti intenzitě světla, které by procházelo jen jedním filtrem. Pokud přidáme ještě třetí filtr kolmý k prvnímu (viz obr. 3.8b dole), bude intenzita světla prošlého všemi třemi filtry poloviční oproti intenzitě světla, které prošlo jen dvěma filtry.

Úkol 2: V úkolu 2 studenti určují směr polarizace, který má světlo po průchodu daným filtrem v situacích z úkolu 1, viz obr. 3.8.

Polarizace jednoho fotonu

Druhá část pracovního listu se věnuje situaci, kdy polarizačními filtry prochází jediný foton. Studenti využijí poznatky získané při pozorování intenzity světla pro určení pravděpodobnosti, že filtrem projde jednotlivý foton.

Pravděpodobnost průchodu fotonu filtrem

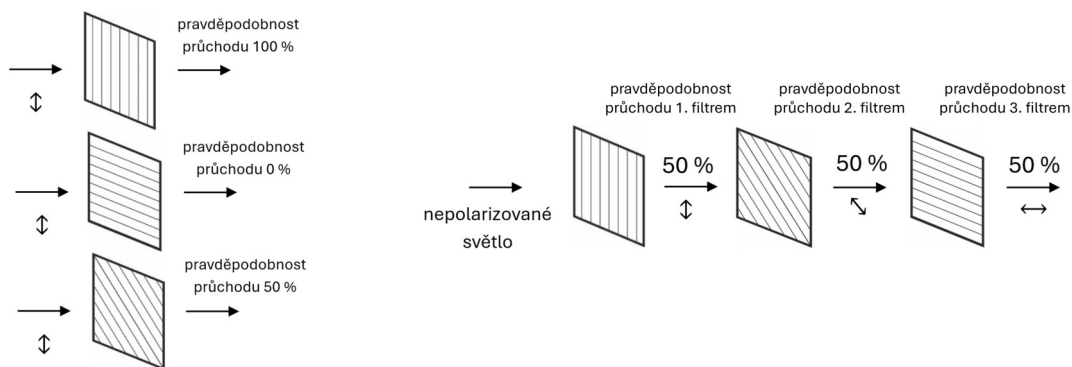
V předchozích případech procházelo polarizačními filtry světlo jako proud mnoha fotonů. Intenzita světla odpovídá počtu fotonů. Nyní si představíme, že filtry prochází pouze jeden foton. Foton má určitou pravděpodobnost filtrem projít, nebo být pohlcen (foton se nemůže rozdělit, takže není možné, aby filtrem prošla např. jen „polovina jednoho fotonu“). Pravděpodobnost, že daný foton filtrem projde, odvozujeme z intenzity světla prošlého filtrem: když filtrem projde např. 50 % světla, znamená to, že pravděpodobnost průchodu jednoho fotonu je 50 %.

Pravděpodobnost, zda foton filtrem projde nebo ne, je dána tím, jaký měl foton směr polarizace před vstupem do filtru. – tj. v jakém poměru měl nakombinovanou polarizaci „ve směru filtru“ a „kolmo na směr filtru“, podobně jako měla kvantová karta nakombinovanou barvu rubu z možností „červená“ a „modrá“.

Všechny fotony s polarizací ve směru filtru filtrem projdou, zatímco fotony s polarizací kolmo na směr filtru jsou filtrem pohlceny. Fotony, jejichž směr polarizace je dán složením obou směrů polarizací tak, že jsou oba směry zastoupeny stejně, mají 50% pravděpodobnost, že projdou, a 50% pravděpodobnost, že budou pohlceny.

O tom, která z možností nastane, rozhoduje teprve změření směru polarizace polarizačním filtrem, podobně jako u kvantové karty rozhodovalo o její barvě kvantové měření v podobě hodu kostkou. Pokud mají obě možnosti nenulovou pravděpodobnost, není možné předem rozhodnout, která nastane. Jde o čistě náhodný jev, který je příkladem nedeterministické povahy kvantové fyziky. V rámci analogie s kvantovou kartou si můžeme představovat, že si foton při průchodu filtrem „hodí kostkou“, jestli projde, nebo bude pohlcen.

Úkol 3: V úkolu 3 studenti na základě předchozího pozorování intenzity světla procházejícího filtry určují pravděpodobnost, že filtrem projde jediný foton s určitým směrem polarizace. Při řešení úkolu okomentujeme souvislost s měřením nekompatibilních veličin.



Obr. 3.9: Řešení úkolu 3 – pravděpodobnost průchodu jednoho fotonu polarizačním filtrem.

Řešení úkolu 3: Foton se stejným směrem polarizace, jako je směr polarizačního filtru, má vždy 100% pravděpodobnost tímto filtrem projít. Pokud foton prošel jedním svisle natočeným filtrem, projde také každým následujícím svislým filtrem. Jde o měření stejné veličiny vícekrát po sobě, proto je výsledek (směr polarizace fotonu po průchodu filtrem) stále stejný.

Foton se směrem polarizace kolmým na směr polarizačního filtru je filtrem vždy pohlcen, pravděpodobnost průchodu je 0 %. I v tomto případě jde o měření stejné veličiny (přímé orientace

polarizace), ale měříme její jinou hodnotu. V analogii s kvantovou kartou by šlo např. o měření rubu – vodorovný směr polarizace by představoval modrou barvu a svislý směr červenou. Foton, u kterého byl naměřen směr polarizace $\uparrow$, zcela jistě nemá směr polarizace $\leftrightarrow$, proto je vodorovným filtrem vždy pohlcen.

Pokud má foton směr polarizace $\uparrow$, můžeme si představit, že je tento směr složen ze dvou šikmých směrů polarizace $\nearrow$ a $\nwarrow$ (jako při skládání vektorů). Oba šikmé směry jsou v této kombinaci (superpozici) zastoupeny stejně. Foton je nyní ve stejném stavu, jako byla kvantová karta – nemá jasně daný směr šikmé polarizace (jako kvantová karta neměla jasně dáno, jestli je na líci dáma, nebo král), ale obě možnosti jsou stejně pravděpodobné. Teprve kvantové měření – průchod fotonu filtrem – rozhodne, která z možností nastane. Pokud nastala možnost $\nwarrow$, foton filtrem prošel, pokud nastala možnost $\nearrow$, foton byl pohlcen. Viděli jsme, že dvěma filtry navzájem pootočenými o 45° (viz horní situace na obr. 3.8b) procházela jen poloviční intenzita světla oproti jednomu samotnému filtru. Pravděpodobnost, že foton se směrem polarizace pootočeným o 45° vůči směru filtru projde, je proto 50 %.

S využitím předchozích pozorování můžeme vysvětlit, proč v situaci se třemi filtry (obr. 3.8b dole) světlo prochází, ačkoli při odstranění prostředního filtru neprochází žádné světlo: Po průchodu prvním filtrem mají fotony polarizaci $\uparrow$, která odpovídá kombinaci dvou směrů $\nwarrow$ a $\nearrow$ se stejnou pravděpodobností. U fotonů, které filtrem prošly, byl naměřen směr $\nwarrow$. Tento směr je opět složením dvou směrů $\leftrightarrow$ a $\uparrow$, takže fotony mají poloviční pravděpodobnost projít posledním vodorovným filtrem, ačkoli jejich původní směr polarizace po průchodu prvním filtrem byl $\uparrow$ a možnost $\leftrightarrow$ vůbec neobsahoval.

Vložení prostředního filtru způsobilo, že fotony původně polarizované ve směru $\uparrow$ díky měření nekompatibilní šikmé polarizace „ztratily“ svoji jasně danou přímou polarizaci, takže při opakovaném měření přímé polarizace jsou opět možné oba výsledky $\leftrightarrow$ i $\uparrow$ se stejnou pravděpodobností.

Shrnutí

V závěru pracovního listu studenti doplňují, co můžeme na základě práce s polarizačními filtry říct o měření nekompatibilních veličin:

- Pokud jde o měření stejné veličiny vícekrát po sobě, mají všechna měření stejný výsledek.
- V případě následného měření dvou nekompatibilních veličin jsou výsledky druhého měření náhodné, můžeme dostat obě možnosti se stejnou pravděpodobností. Měření v kvantové fyzice není pasivní proces „zjišťování hodnot“, ale může měnit vlastnosti zkoumaného systému.
- Díky vlastnostem nekompatibilních veličin můžeme vysvětlit situaci se třemi filtry, kdy měření šikmé polarizace v podobě prostředního filtru změnilo stav fotonu tak, že při měření přímé polarizace třetím filtrem byly stejně pravděpodobné výsledky $\uparrow$ i $\leftrightarrow$, takže pravděpodobnost průchodu fotonu posledním filtrem byla 50 %.

3.5 Rozšiřující komentář:

Zbývá-li na závěr čas, můžeme se krátce vrátit k relacím neurčitosti mezi polohou a hybností. Následující poznámky jsou zamýšleny čistě jako rozšíření pro pokročilejší či zvědavé studenty.

Souvislost s Heisenbergovými relacemi neurčitosti

V případě polohy a hybnosti jde o spojitě veličiny, které mohou nabývat obecně mnoha různých hodnot, ne pouze dvou. Kdybychom zcela přesně změřili polohu volné částice (částice, která

není vázána např. v atomu), její hybnost by mohla nabývat libovolné hodnoty – každá hodnota hybnosti by byla stejně pravděpodobná.

Pokud je poloha částice určena s nějakou nejistotou (nepřesností) Δx , pak v tomto stavu hybnost nemůže být určena příliš přesně. Nepřesnost hybnosti Δp v takovém stavu musí být dostatečně velká, aby byla splněna tzv. Heisenbergova relace neurčitosti

$$\Delta x \Delta p \geq \text{konst.} = \frac{h}{4\pi}.$$

Jde o vztah, který určuje hranici přesnosti, s níž může být dána hodnota obou veličin zároveň, protože součin obou nepřesností musí být větší nebo roven konstantě. Pokud jednu z veličin změříme s větší přesností, stoupne nepřesnost druhé veličiny. Pokud by byla nepřesnost jedné veličiny nulová, musela by být nepřesnost druhé veličiny nekonečná a nevěděli bychom o ní vůbec nic – stejně jako v příkladech s polarizací.

3.6 Modifikace a návaznost na jiné moduly:

Pro představení nekompatibilních veličin není nutné se samostatně věnovat kvantovému měření ani principu superpozice. Výklad pomocí kvantové karty by měl dostatečně ukázat důležité vlastnosti kvantového měření – tj. že má pravděpodobnostní povahu a ovlivňuje vlastnosti měřeného objektu. Máme-li dost času, můžeme na začátek zařadit aktivitu kvantové piškvorky popsanou v modulu 2, která studenty seznámí s principem kvantového měření a principem superpozice pomocí hry.

Pokud studenti již znají princip superpozice z modulu 2, můžeme se odkazovat na to, že je-li výsledek měření v nějakém poměru, znamená to, že částice byla před měřením v superponovaném stavu těchto dvou vlastností v daném poměru. Např. výsledek 50 % „dáma“ a 50 % „král“ znamená, že částice před měřením byla v superpozici, kde je z 50 % zastoupen stav $|dáma\rangle$ a z 50 % stav $|král\rangle$.

Vlastnosti nekompatibilních veličin využívá kvantová kryptografie, které je věnován modul 4.

Modul 4: Kvantové šifrování (protokol BB84)

Cílem modulu je přiblížit studentům kvantovou kryptografii na příkladu protokolu BB84. Jde o způsob bezpečného předávání šifrovacího klíče pomocí polarizovaných fotonů, který byl vytvořen v roce 1984 a je pojmenován po svých tvůrcích Charlesi Bennettovi a Gillesi Brassardovi.

Způsob výkladu je navržen tak, aby umožňoval představit princip fungování protokolu BB84 i v případě, že studenti nejsou seznámeni s nekompatibilními veličinami a s polarizací fotonu. V sekci 4.5 je uvedena alternativa výkladu, která využívá polarizaci fotonu a předpokládá, že studenti prošli modulem 3.

4.1 Cíle:

- Student vlastními slovy vysvětlí, jak se vlastnosti nekompatibilních veličin využívají k zabezpečení komunikace při kvantovém přenosu šifrovacího klíče.

4.2 Časový plán:

Modul 4 – hodina 1/1		Čas
Úvod		5 min
Nekompatibilní veličiny	• zavedení nekompatibilních veličin pomocí kvantové karty	10 min
Úvod do kryptografie	• motivace • šifrování zpráv pomocí šifrovacího klíče • přenos informace pomocí fotonu	10 min
Kvantové přenášení klíče	• vysvětlení principu protokolu BB84 • přenos klíče (bez odposlechu) • přenos klíče s odposlechem (Eva)	15 min
Shrnutí		5 min

4.3 Pomůcky:

- Kvantová karta a hrací kostka (demonstrační, případně i pro studenty)
- 3–4 hrací kostky nebo mince
- Pracovní list *Kvantová kryptografie* (varianta s kvantovou kartou)

4.4 Průběh výuky:

Nekompatibilní veličiny – kvantová karta

Pokud studenti neabsolvovali modul 3 nebo jeho část a nejsou seznámeni s kvantovým měřením a nekompatibilními veličinami, zařadíme na úvod ukázkou měření nekompatibilních veličin pomocí kvantové karty (podrobně popsána v modulu 3).

Seznámíme studenty s tím, že fotony mají dvě vlastnosti, které se chovají stejně jako rub a líc kvantové karty. Jde o dvě určité orientace polarizace fotonu, ale pro vysvětlení protokolu BB84 budeme dále používat analogii s vlastnostmi karty. Toto zjednodušení ušetří čas, který by bylo potřeba vynaložit na zavedení značení směrů polarizace a vysvětlení měření polarizace fotonu pomocí polarizačních filtrů. Vysvětlení protokolu BB84 přímo na polarizaci fotonů je popsáno ve druhé variantě výkladu, která předpokládá absolvování modulu 3.

Úvod do kryptografie

Šifrování elektronické komunikace má široké využití: od přihlašování se k různým službám jako je internetové bankovníctví až po posílání zpráv. Toto šifrování je založeno na tom, že některé matematické operace (jako např. rozklad velkých čísel na součin prvočísel) jsou pro klasické počítače výpočetně náročné. S očekávaným nástupem kvantových počítačů, které takové operace budou umět provádět mnohonásobně rychleji, bude potřeba přejít na jiný způsob šifrování, který odolá i výpočetní síle kvantových počítačů. Touto problematikou se zabývá kvantová kryptografie.

Kvantové přenášení klíče (Quantum Key Distribution)

Možnou cestou, jak komunikaci zabezpečit i proti kvantovým počítačům, je použití šifrovacího klíče, který znají pouze obě zúčastněné strany. Zpráva zašifrovaná takovým klíčem může být odeslána veřejným kanálem (nezabezpečeným proti odposlechu), protože bez klíče její obsah nelze zjistit (pokud je klíč dostatečně dlouhý, tj. ideálně stejně dlouhý jako zpráva.) Problém spočívá v tom, jak si šifrovací klíč předat, aby jej nemohla získat třetí strana – tento problém řeší tzv. kvantové přenášení klíče.

Jedním z nejjednodušších způsobů kvantového přenášení klíče je *protokol BB84* podle tvůrců Charlese Bennetta a Gillese Brassarda, kteří ho teoreticky popsali v roce 1984. Bezpečný přenos šifrovacího klíče je zaručen díky zákonům kvantové fyziky, které umožňují, aby byl každý pokus o odposlech klíče odhalen. Důležitou roli v něm hrají nekompatibilní veličiny a kvantové měření.

Ukážeme si, jak si dvě strany, které pojmenujeme Alice a Bob, mohou předat šifrovací klíč a jak pomocí něj mohou šifrovat zprávy.

Šifrování zpráv pomocí šifrovacího klíče

Alice a Bob si chtějí poslat tajnou zprávu, což je řetězec jedniček a nul. Aby zprávu nemohla přečíst třetí strana, použijí společný šifrovací klíč, který znají jen oni dva a nikdo jiný. Jako šifrovací klíč slouží libovolný zcela náhodný řetězec jedniček a nul – ideálně stejně dlouhý jako zpráva. (Pokud by byl klíč kratší než zpráva, zopakovali bychom jej několikrát za sebou, abychom dostali řetězec stejně dlouhý jako zpráva. Čím je ale klíč delší, tím je šifrování bezpečnější.)

Alice zašifruje zprávu tak, že si pod sebe napíše zprávu a klíč. Cifry, které jsou pod sebou, sečte modulo 2. To znamená, že při sečtení dvou čísel napíše jako výsledek jen zbytek po dělení dvěma. Jinak lze sčítání modulo 2 studentům jednoduše přiblížit jako sčítání, které se řídí těmito pravidly:

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0 \pmod{2}, & 0 + 1 = 1 \pmod{2}, \\ 1 + 1 = 0 \pmod{2}, & 1 + 0 = 1 \pmod{2}. \end{array}$$

Zašifrovanou zprávu už může Alice poslat libovolným veřejným kanálem Bobovi. Bez znalosti klíče totiž zprávu nelze přechíst ani s pomocí kvantového počítače, protože jde jen o náhodný shluk jedniček a nul. (Klíč totiž rozhoduje, zda v zašifrované zprávě zůstane původní číslo, nebo se číslo změní, a klíč je náhodný.) Na tabuli zapíšeme ukázkou Aliciny zprávy a klíče a necháme studenty, aby ji zašifrovali:

Zpráva:	1	1	0	0	1	0	1	1	0
Klíč:	1	0	1	1	1	0	0	1	0
Šifrovaná zpráva:	0	1	1	1	0	0	1	0	0

Bob obdrží zašifrovanou zprávu a provede s ní stejnou operaci jako Alice – přičte k ní šifrovací klíč modulo 2, čímž zprávu dešifruje. Bobova dešifrovaná zpráva je totožná se zprávou, kterou zašifrovala Alice. Opět necháme studenty, aby zprávu dešifrovali a ověřili, že je totožná s původní zprávou a promysleli, že šifrovací a dešifrovací postup totožnost zpráv zaručují:

Šifrovaná zpráva:	0	1	1	1	0	0	1	0	0
Klíč:	1	0	1	1	1	0	0	1	0
Dešifrovaná zpráva:	1	1	0	0	1	0	1	1	0

Kdyby měli Alice a Bob zaručeno, že jejich tajný klíč nezná nikdo jiný, byla by jejich komunikace neprolomitelná, i kdyby už probíhala zcela nezabezpečeným způsobem. Problém spočívá v tom, jak si bezpečně předat klíč, aby ho nikdo neodposlechl.

Kvantové přenášení klíče pomocí protokolu BB84

V této části hodiny se budeme zabývat tím, jak si Alice a Bob mohou předat tajný šifrovací klíč, který teprve později použijí pro šifrování zpráv. Zdůrazníme, že zatím nejde o posílání zprávy, ale o vygenerování náhodného řetězce jedniček a nul, který znají právě jen obě zúčastněné strany.

Přenos informace pomocí fotonu

Alice a Bob si mohou informace posílat pomocí fotonů tak, že jeden foton představuje jeden bit informace. Jak ale pomocí fotonů zakódovat hodnoty 0 nebo 1? Fotony mají dvě vlastnosti, které mohou nabývat právě dvou hodnot – jde o určité směry polarizace. Alice a Bob si tedy posílají fotony a měří jejich polarizaci.

Protože se měření směru polarizace fotonu chová podobně jako měření vlastností kvantové karty, v rámci zjednodušení vysvětlíme kvantové přenášení klíče na kvantové kartě. Kvantová karta představuje foton, který si Alice a Bob pošlou a měří jeho vlastnosti (líc nebo rub kvantové karty). Domluví se, která možnost bude znamenat 0 a která 1, např. takto:

Vlastnost	LÍC	RUB	bit
Hodnoty	dáma (Q)	červená	0
	král (K)	modrá	1

Názorná ukázka protokolu BB84

Jak protokol BB84 funguje představíme studentům na názorné ukázce, do které několik z nich zapojíme. Dva studenti hrají roli Alice a Boba, kteří pomocí hodu kostkou náhodně vybírají, kterou vlastnost kvantové karty budou měřit. Studenti si mohou kvantovou kartu fyzicky předávat od Alice k Bobovi (jako kdyby foton putoval optickým vláknem) a provádět měření přímo na ní. Výsledky měření Alice i Boba zapisujeme na tabuli, studenti si je zapisují do připravené tabulky v pracovním listu (viz tabulka 4.1). Odeslání jednoho bitu informace (jedné kvantové karty) probíhá v těchto krocích:

- **Alice** – náhodně zvolí vlastnost, jejíž hodnotu bude měřit u karty, kterou pošle Bobovi (LÍC/RUB).
- **Výsledek Alicina měření** – Alice provede měření tak, že hodí kostkou. O výsledku měření tedy rozhodne náhoda. Pokud Alice měří líc, jsou možné výsledky „dáma“/ „král“, pokud měří rub, možné výsledky jsou „červená“/ „modrá“.
- **Bob** – náhodně zvolí vlastnost, kterou bude měřit u karty, kterou mu poslala Alice (LÍC/RUB).
- **Výsledek Bobova měření** – Bob provede měření (pomocí hodu kostkou). Se studenty můžeme po několika měřeních pozorovat, že pokud Bob měří stejnou vlastnost jako Alice, musí vždy naměřit stejnou hodnotu jako ona. Proto můžeme házení kostkou pro urychlení vynechat. Pokud Bob měří druhou vlastnost, pak jsou oba výsledky stejně pravděpodobné a hodit kostkou musíme. Ve skutečnosti Bob neví, jakou vlastnost Alice zvolila (je ve své laboratoři a do Aliciny laboratoře „nevidí“), takže musí měření provést vždy.

Tímto způsobem si Alice s Bobem pošlou alespoň 15 kvantových karet (fotonů). Na začátku je potřeba studentům napovídat, ale po odeslání několika karet se celý proces zautomatizuje a zrychlí. Výsledky měření průběžně zapisujeme na tabuli, studenti si je píšou do připravené tabulky v pracovním listu, viz tabulka 4.1.

Vyhodnocení klíče

Nyní se podíváme, jak Alice s Bobem ze získaných dat sestaví klíč. Poté, co ukončili odesílání karet, mají každý svou posloupnost nul a jedniček. Tyto dvě posloupnosti se shodují na těch pozicích, kde oba náhodou měřili stejnou vlastnost (zelené řádky v tabulce 4.1). Na pozicích, kde měřili každý jinou vlastnost, se shodovat mohou, ale nemusí (bílé řádky v tabulce 4.1). Alice s Bobem proto zveřejní, kterou vlastnost kdy měřili (první sloupec tabulky 4.1), a vzájemně si své volby porovnají. Při tom ale nezveřejňují výsledky měření (druhý sloupec tabulky zůstává tajný). V posloupnosti si ponechají pouze ta měření, u kterých se shodli na volbě měřené vlastnosti, a všechna ostatní měření vyškrtnou. Výsledná posloupnost tvoří šifrovací klíč. Pokud během přenosu nedošlo k odposlechu, pak znají šifrovací klíč jen oni a mohou jej použít k šifrování zpráv.

Pro kontrolu pochopení se studentů můžeme zeptat, v kolika měřeních se Alice s Bobem shodnou na volbě vlastnosti, když je vybírají náhodně. Pro velký počet měření se počet shod blíží polovině všech měření, polovinu měření tedy musí vyškrtnout.

Odposlech při kvantovém přenášení klíče

Bezpečnost kvantového přenosu klíče spočívá v tom, že umožňuje odhalit odposlech. Odposlechem rozumíme, že se třetí strana pokouší zachytit předávaný klíč. Třetí strana bývá označována jako Eva (z podobnosti slov: Eve – angl. Eva, eavesdropping – angl. odposlech).

Alice			Bob			Shoda volby měřené vlastnosti?	Klíč
vlastnost LÍC/RUB	výsledek měření	bit	vlastnost LÍC/RUB	výsledek měření	bit		
LÍC	dáma	0	LÍC	dáma	0	ANO	0
RUB	modrá	1	LÍC	král	1	NE	
LÍC	král	1	RUB	modrá	1	NE	
LÍC	král	1	LÍC	král	1	ANO	1
RUB	červená	0	LÍC	král	1	NE	
LÍC	král	1	RUB	modrá	1	NE	
RUB	červená	0	RUB	červená	0	ANO	0
RUB	červená	0	RUB	červená	0	ANO	0
LÍC	dáma	0	LÍC	dáma	0	ANO	0
LÍC	král	1	LÍC	král	1	ANO	1
RUB	modrá	1	RUB	modrá	1	ANO	1
RUB	červená	0	LÍC	dáma	0	NE	
LÍC	dáma	0	LÍC	dáma	0	ANO	0
RUB	modrá	1	RUB	modrá	1	ANO	1

Tab. 4.1: Zápis naměřených hodnot při kvantovém přenosu šifrovacího klíče (s využitím kvantové karty místo polarizace fotonu)

Eva zachytí foton, tj. kvantovou kartu, kterou Alice odeslala, a stejně jako Bob změří některou z jejích vlastností dle své volby. Protože neví, kterou vlastnost měřila Alice, ani kterou bude měřit Bob, zvolí vlastnost například náhodně. Aby nebyla odhalena, pošle po svém měření kartu Bobovi.

Názorná ukázka protokolu BB84 s odposlechem

Zvolíme dalšího studenta, který bude hrát roli Evy a hodem kostkou bude vybírat vlastnost, kterou Eva měří. Protokol probíhá podobně jako v předchozím případě, mezi Alicino a Bobovo měření je vloženo ještě Evino měření:

- **Alice** – náhodně zvolí vlastnost, jejíž hodnotu bude měřit u karty, kterou pošle Bobovi (LÍC/RUB).
- **Výsledek Alicina měření** – Alice provede měření tak, že hodí kostkou. O výsledku měření tedy rozhodne náhoda). Pokud Alice měří líc, jsou možné výsledky „dáma“/„král“, pokud měří rub, možné výsledky jsou „červená“/„modrá“.
- **Eva** – náhodně zvolí vlastnost, jejíž hodnotu bude měřit u kvantové karty, kterou zachytila od Alice (LÍC/RUB).
- **Výsledek Evina měření** – Eva provede měření (pomocí hodu kostkou) a pak kartu odesílá Bobovi.
- **Bob** – náhodně zvolí vlastnost, kterou bude měřit u karty, kterou mu poslala Alice (LÍC/RUB).
- **Výsledek Bobova měření** – Bob provede měření (pomocí hodu kostkou).

Opět nasbíráme alespoň 15 měření a výsledky zapíšeme na tabuli, studenti si je zapisují do pracovního listu (viz tabulka 4.2).

Vyhodnocení klíče a odhalení odposlechu

Po skončení přenosu fotonů Alice a Bob opět porovnají své volby měřených vlastností a stejně jako v předchozím případě si ponechají pouze hodnoty, u nichž měřili oba stejnou vlastnost. Podívejme se, jak tyto hodnoty ovlivnilo Evino měření. Pokud se Eva trefila a měřila stejnou vlastnost jako Alice i Bob, její přítomnost se na výsledcích měření nijak neprojevila (zelené

řádky v tabulce 4.2). Pokud ale zvolila druhou vlastnost, která je s první vlastností nekompatibilní, změnila tím stav kvantové karty (fotonu), kterou odeslala Bobovi. Bob tak měřil vlastnost karty, jejíž stav byl ovlivněn předchozím měřením, a místo stejného výsledku jako Alice dostane náhodný výsledek. Ten se s Aliciným výsledkem shodovat může, ale nemusí (červené řádky v tabulce 4.2). Evina přítomnost se tak projevuje jako odlišnost výsledků měření Alice a Boba v případech, kdy zvolili stejnou veličinu (v tabulce 4.2 označeno jako X).

Aby Alice s Bobem odhalili případný odposlech, porovnají si část naměřených hodnot. Pokud se všechny hodnoty shodují, mohou předpokládat, že k odposlechu nedošlo, takže mohou zbylé hodnoty použít jako bezpečný klíč. Pokud se ale v některých případech naměřené hodnoty liší, ačkoli oba měřili stejnou vlastnost, je to způsobeno odposlechem, který změnil stav fotonu na cestě od Alice k Bobovi. V takovém případě Alice s Bobem vědí, že klíč nemohou k šifrování použít, protože není bezpečný. Musí se zbavit odposlechu a vygenerovat si nový klíč.

Poznámka: No-cloning theorem Mezi studenty se může objevit návrh, že by Eva mohla zachycený foton „zkopírovat“ a změřit vlastnosti až na této „kopii“, aby mohla Bobovi odeslat původní neporušený foton. Podle zákonů kvantové fyziky ale není možné, aby došlo ke „zkopírování“ neznámého stavu částice na jinou částici, aniž by při tom došlo k porušení stavu původní částice. Toto pravidlo se označuje jako *Věta o neklonování (No-cloning theorem)*.

Alice			Eva			Bob			Shoda volby měřené vlastnosti?	Klíč
vlastnost LÍC/RUB	výsledek měření	bit	vlastnost LÍC/RUB	výsledek měření	bit	vlastnost LÍC/RUB	výsledek měření	bit		
LÍC	dáma	0	LÍC	dáma	0	LÍC	dáma	0	ANO	0
RUB	modrá	1	LÍC	král	1	LÍC	král	1	NE	
LÍC	král	1	RUB	modrá	1	RUB	modrá	1	NE	
LÍC	král	1	RUB	červená	0	LÍC	dáma	0	ANO	X
RUB	červená	0	LÍC	král	1	LÍC	král	1	NE	
LÍC	král	1	LÍC	král	1	RUB	modrá	1	NE	
RUB	červená	0	LÍC	dáma	0	RUB	červená	0	ANO	0
RUB	červená	0	LÍC	král	1	RUB	modrá	1	ANO	X
LÍC	dáma	0	RUB	dáma	0	LÍC	dáma	0	ANO	0
LÍC	král	1	LÍC	král	1	LÍC	král	1	ANO	1
RUB	modrá	1	LÍC	král	1	RUB	červená	0	ANO	X
RUB	červená	0	LÍC	dáma	0	LÍC	dáma	0	NE	
LÍC	dáma	0	RUB	červená	0	LÍC	král	1	ANO	X
RUB	modrá	1	RUB	modrá	1	RUB	modrá	1	ANO	1

Tab. 4.2: Zápis naměřených hodnot při kvantovém přenosu šifrovacího klíče s odposlechem (s využitím kvantové karty místo polarizace fotonu)

4.5 Modifikace a návaznost na jiné moduly:

Dále jsou uvedeny odlišnosti výkladu oproti variantě bez předchozího absolvování modulu 3, ve které je k přenosu informace použita kvantová karta. V této variantě budeme místo kvantové karty uvažovat přenos informace pomocí fotonů a jejich polarizace, což odpovídá skutečné realizaci. Budeme potřebovat tyto pomůcky:

- Demonstrační polarizační filtry
- 3–4 hrací kostky nebo mince
- Pracovní list *Kvantová kryptografie* (varianta s polarizací fotonu)

Přenos informace pomocí fotonu

Na začátku připomeneme vlastnosti nekompatibilních veličin a polarizaci fotonu. Fotony mají dvě vlastnosti, které jsou navzájem nekompatibilní a mohou nabývat právě dvou hodnot. Tyto

dvě vlastnosti nazýváme dvě *orientace polarizace* – přímá a šikmá. Přímá polarizace může mít směry ($\leftrightarrow$, $\updownarrow$), šikmá polarizace může mít směry ($\nearrow$, $\nwarrow$).

Alice a Bob si mohou informace posílat pomocí fotonů tak, že jeden foton představuje jeden bit informace. Směr polarizace fotonu kóduje hodnotu 0 nebo 1 podle domluvy, např. takto:

Veličina	Přímá polarizace (+)	Šikmá polarizace (×)	bit
Hodnoty	$\leftrightarrow$ $\updownarrow$	$\nearrow$ $\nwarrow$	0 1

Alice a Bob si posílají fotony a pomocí polarizačních filtrů měří směr jejich polarizace (přímé nebo šikmé).

Poznámka o měření polarizace fotonu

Zmíníme, že v praxi je potřeba využít jiný způsob měření polarizace fotonu než pouze polarizační filtry. Ty totiž fotony s určitým směrem polarizace pohlcují. Měření polarizace fotonu lze provést např. pomocí dvojlomného krystalu, který díky svým anizotropním vlastnostem rozděluje nepolarizované světlo na dva paprsky s navzájem kolmým směrem polarizace. Každý paprsek můžeme nasměrovat na jiné stínítko či detektor fotonů a podle toho, na kterém stínítku bude foton zachycen, určíme jeho polarizaci.

V tomto modelu Alice náhodně zvolí orientaci a směr polarizace a pomocí příslušně natočeného polarizačního filtru odešle Bobovi foton s tímto směrem polarizace. Bob pomocí vhodně natočeného dvojlomného krystalu nasměruje fotony na jedno či druhé stínítko a podle toho určí směr jejich polarizace.

Názorná ukázka protokolu BB84

Názornou ukázkou posílání fotonu podle protokolu BB84 provádíme stejně jako ve variantě popsané v sekci 4.4 s tím rozdílem, že místo vlastností kvantové karty používáme označení směrů polarizace. Druhým rozdílem je, že měření polarizace neprovádíme fyzicky pomocí kvantové karty, ale výsledky měření vyhodnocujeme ze znalosti směru polarizace fotonu. Podle toho rozhodujeme, zda foton s jistotou projde, neprojde, nebo jsou přípustné obě možnosti a musíme rozhodnout náhodně hodem kostkou. Ukázka zápisu měření bez odposlechu i s odposlechem je v tabulkách 4.3 a 4.4.

Alice			Bob			Shoda orientace polarizace?	Klíč
polarizace + / ×	výsledek měření	bit	polarizace + / ×	výsledek měření	bit		
+	$\leftrightarrow$	0	+	$\leftrightarrow$	0	ANO	0
×	$\nwarrow$	1	+	$\updownarrow$	1	NE	
+	$\updownarrow$	1	×	$\nearrow$	0	NE	
+	$\updownarrow$	1	+	$\updownarrow$	1	ANO	1
×	$\nearrow$	0	+	$\updownarrow$	1	NE	
+	$\updownarrow$	1	×	$\nwarrow$	1	NE	
×	$\nearrow$	0	×	$\nearrow$	0	ANO	0
×	$\nearrow$	0	×	$\nearrow$	0	ANO	0
+	$\leftrightarrow$	0	+	$\leftrightarrow$	0	ANO	0
+	$\updownarrow$	1	+	$\updownarrow$	1	ANO	1
×	$\nwarrow$	1	×	$\nwarrow$	1	ANO	1
×	$\nearrow$	0	+	$\leftrightarrow$	0	NE	
+	$\leftrightarrow$	0	+	$\leftrightarrow$	0	ANO	0
×	$\nwarrow$	1	×	$\nwarrow$	1	ANO	1

Tab. 4.3: Zápis naměřených hodnot při kvantovém přenosu šifrovacího klíče (s využitím polarizace fotonu).

Alice			Eva			Bob			Shoda orientace polarizace?	Klíč
polarizace + / x	výsledek měření	bit	polarizace + / x	výsledek měření	bit	polarizace + / x	výsledek měření	bit		
+	$\leftrightarrow$	0	+	$\leftrightarrow$	0	+	$\leftrightarrow$	0	ANO	0
x	$\nearrow$	1	+	$\downarrow$	1	+	$\downarrow$	1	NE	
+	$\downarrow$	1	x	$\nearrow$	1	x	$\nearrow$	1	NE	
+	$\downarrow$	1	x	$\nearrow$	0	+	$\leftrightarrow$	0	ANO	X
x	$\nearrow$	0	+	$\downarrow$	1	+	$\downarrow$	1	NE	
+	$\downarrow$	1	+	$\downarrow$	1	x	$\nearrow$	1	NE	
x	$\nearrow$	0	+	$\leftrightarrow$	0	x	$\nearrow$	0	ANO	0
x	$\nearrow$	0	+	$\downarrow$	1	x	$\nearrow$	1	ANO	X
+	$\leftrightarrow$	0	x	$\leftrightarrow$	0	+	$\leftrightarrow$	0	ANO	0
+	$\downarrow$	1	+	$\downarrow$	1	+	$\downarrow$	1	ANO	1
x	$\nearrow$	1	+	$\downarrow$	1	x	$\nearrow$	0	ANO	X
x	$\nearrow$	0	+	$\downarrow$	0	+	$\leftrightarrow$	0	NE	
+	$\leftrightarrow$	0	x	$\nearrow$	0	+	$\downarrow$	1	ANO	X
x	$\nearrow$	1	x	$\nearrow$	1	x	$\nearrow$	1	ANO	1

Tab. 4.4: Zápis naměřených hodnot při kvantovém přenosu šifrovacího klíče s odposlechem (s využitím polarizace fotonu).

Modul 5: Kvantově-mechanický model atomu

Tento modul studentům představí kvantově-mechanický model atomu, který je v současné době nejdokonalším modelem atomu. Opírá se o pravděpodobnostní popis kvantového světa a využívá hustotu pravděpodobnosti nalezení elektronu v atomu.

Pokud zařazujeme modul 5 samostatně, zařadíme na začátek aktivitu kvantové lodě (viz modul 2), ve které se studenti seznámí s měřením v kvantové fyzice. Pokud už studenti tuto aktivitu absolvovali, můžeme na ni při představování konceptu hustoty pravděpodobnosti navázat. Pak lze celý modul stihnout za jednu vyučovací hodinu podle časování navrženého níže.

5.1 Cíle:

- Student se seznámí s kvantově-mechanickým popisem atomu vodíku prostřednictvím pravděpodobnosti a načrtne tvary základních elektronových orbitalů.

5.2 Časový plán:

Modul 5 – hodina 1/1		Čas
Úvod		5 min
Hustota pravděpodobnosti	• Hustota pravděpodobnosti ve 2D na příkladu kvantových lodí	5 min
Orbitaly atomu vodíku	• Úhlová část hustoty pravděpodobnosti • Závislost hustoty pravděpodobnosti na vzdálenosti od jádra	15 min
	• Celková hustota pravděpodobnosti	15 min
Shrnutí	• Prostorová představa orbitalů	5 min

5.3 Pomůcky:

- Pracovní list *Kvantově mechanický model atomu*
- Prezentace s obrázky řešení úkolů z pracovního listu
- (Program *Orbitaly*¹ – je možno využít pro dynamické zobrazování řešení úkolů z pracovního listu místo obrázků v prezentaci)

¹Dostupný na: <https://kdf.mff.cuni.cz/~koupilova/orbitals/index.php?lang=CZ>

5.4 Průběh výuky:

Hustota pravděpodobnosti

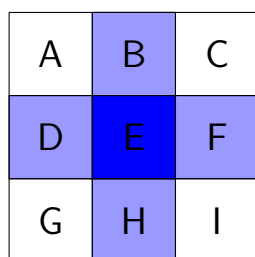
Nejprve studenty seznámíme s konceptem hustoty pravděpodobnosti nalezení elektronu v atomu. Můžeme využít jejich zkušenosti s dvojrozměrným případem ze hry kvantové lodě.

Hustota pravděpodobnosti nalezení elektronu říká, jaká je pravděpodobnost najít elektron v různých místech atomu – tj. popisuje rozložení pravděpodobnosti v prostoru. Ve hře kvantové lodě bylo rozložení pravděpodobnosti na jednotlivých polích znázorněno pomocí barevných fólií. Intenzita barvy odpovídala pravděpodobnosti na daném políčku. (Tmavší barva odpovídala větší pravděpodobnosti.) Když pravděpodobnost vydělíme plochou políčka, dostaneme hustotu pravděpodobnosti nalezení elektronu na tomto políčku.

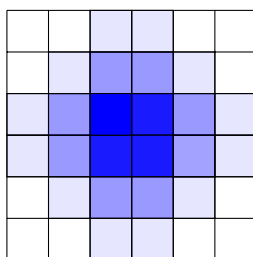
Nyní budeme popisovat rozložení pravděpodobnosti uvnitř atomu. Atom je trojrozměrný, ale na obrázcích budeme zakreslovat jen hustotu pravděpodobnosti nalezení elektronu ve svislé rovině procházející jádrem. Její rozložení v prostoru dostaneme rotací této roviny kolem svislé osy z procházející jádrem.²

Hrací plán s devíti políčky nyní představuje rovinu řezu atomem. Atom je rozdělen na devět oblastí, z nichž každá má nějakou pravděpodobnost, že v ní elektron nalezneme. Elektron tak může být v superpozici až devíti stavů (obr. 5.1a). Tento popis je ale hodně hrubý. Pro přesnější popis můžeme zmenšovat políčka a zjemňovat dělení prostoru. Tím zvyšujeme počet stavů, které můžeme kombinovat do superpozice (obr. 5.1b). Když budeme dělení zjemňovat „do nekonečna“, dostaneme kombinaci „nekonečně mnoha nekonečně malých políček“, která popisuje, jak je pravděpodobnost rozložena v rovině (obr. 5.1c). Elektron v atomu tak je ve stavu, kdy má určitou pravděpodobnost být nalezen v různých částech atomu. Část prostoru, ve kterém je hustota pravděpodobnosti nalezení elektronu vyšší než zadaná hodnota, označujeme jako *orbital*. Mezní hodnota se volí tak, aby celková pravděpodobnost nalezení elektronu uvnitř orbitalu byla 95 %.

Pro popis orbitalů použijeme opačnou barevnou škálu, než jsme používali dosud při práci s fóliemi. Nyní bude nízkou hustotu pravděpodobnosti znázorňovat tmavá červená až černá, zatímco světlé odstíny červené až bílé budou odpovídat vysoké hustotě pravděpodobnosti.



(a) Superpozice několika polí



(b) Superpozice více polí



(c) Superpozice „nekonečně mnoha polí“

Obr. 5.1: Od superpozice několika polí k hustotě pravděpodobnosti – postupné zjemňování „dělení prostoru“.

²Toto zjednodušení můžeme použít, protože průběh hustoty pravděpodobnosti má válcovou symetrii při otáčení kolem svislé osy (což je důsledek řešení Schrödingerovy rovnice pro atom vodíku). Jde o stavy, ve kterých je přesně daná energie elektronu, tj. nejde o superpozici stavů s různými energiemi.

Orbitaly atomu vodíku

Jakékoli místo v atomu můžeme popsat tak, že udáme jeho vzdálenost od jádra a směr, ve kterém se od jádra nachází. Protože popisujeme situaci v řezu rovinou procházející jádrem, stačí nám jeden úhel a vzdálenost.

Díky tomu, že je elektrostatické působení jádra na elektron do všech směrů stejné, můžeme hustotu pravděpodobnosti nalezení elektronu rozdělit na dvě části. První část závisí na tom, jak daleko jsme od jádra, označíme ji R . Druhá část závisí na směru (úhlu), kterým od jádra jdeme, označíme ji U . Celkovou hustotu pravděpodobnosti nalezení elektronu na nějakém místě ρ tak můžeme zapsat jako

$$\rho = R \cdot U.$$

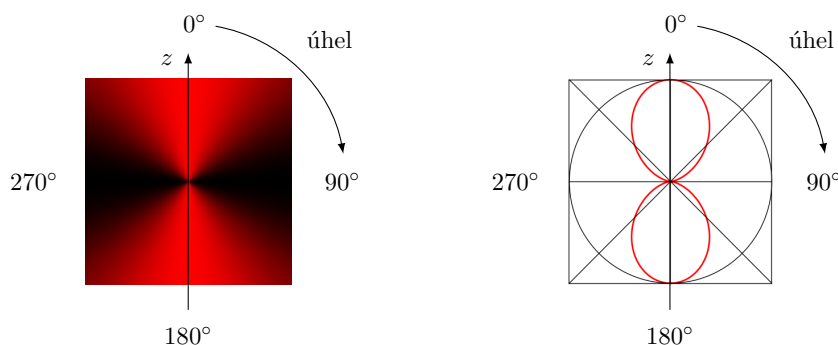
V následující části studenty seznámíme se zobrazováním jednotlivých částí hustoty pravděpodobnosti. Porozumění si ověří na úlohách v pracovním listu.

Závislost hustoty pravděpodobnosti na směru (úhlu)

Část hustoty pravděpodobnosti závislou jen na tom, *kterým směrem od středu atomu jdeme*, znázorňujeme „paprskovým“³ nebo polárním grafem.

V „paprskovém“ grafu je velikost hustoty pravděpodobnosti znázorněna pomocí intenzity barvy v daném směru. Úhel odečítáme od svislé osy z po směru hodinových ručiček, jak naznačují šipky v obrázku 5.2. Graf tak sestává z jakýchsi stejnobarevných „paprsků.“ Vidíme, ve směru 0° je červená barva hodně jasná, hustota pravděpodobnosti je tedy v tomto směru velká. S rostoucím úhlem jas barvy postupně slábne a ve směru 90° je barva černá, což odpovídá nulové hustotě pravděpodobnosti.

V polárním grafu je velikost hustoty pravděpodobnosti pro daný směr znázorněna vzdáleností bodu červené křivky od počátku, úhel odečítáme stejně jako v „paprskovém“ grafu. Ve směru 0° je bod křivky od počátku daleko, hustota pravděpodobnosti je tedy v tomto směru velká, zatímco ve směru např. 45° je bod křivky k počátku blíže a hustota pravděpodobnosti je v tomto směru menší. Ve směru 90° leží bod křivky přímo v počátku, hustota pravděpodobnosti v tomto směru je tedy nulová.



Obr. 5.2: „Papřskový“ graf (vlevo) a polární graf (vpravo).

Úkoly 1 a 2: Studenti si mohou na úkolech ověřit, jestli porozuměli „papřskovému“ a polárnímu grafu. Pokud jim dělá problém orientovat se v polárním grafu, je možné tento graf úplně vynechat a pracovat pouze s „papřskovým“ grafem, protože nese stejnou informaci.

V úkolu 1 studenti na základě obou grafů na obrázku 5.3 rozhodují, ve kterém směru je hustota pravděpodobnosti největší, resp. nejmenší. Vidíme, že nejvzdálenější body polárního grafu a nejjasnější barva „papřského“ grafu je ve směrech mířících do rohů čtverce, tedy ve směrech 45° ,

³Nejde o oficiální pojmenování grafu, ale pouze o označení pro potřeby tohoto textu a pracovního listu.

135° , 225° a 315° . Naopak ve směrech 0° , 90° , 180° , 270° leží bod polárního grafu v počátku a barva „paprsků“ v tomto směru je černá, což odpovídá nulové hustotě pravděpodobnosti.

V úkolu 2 naopak studenti kreslí grafy pro případ, že je hustota pravděpodobnosti ve všech směrech stejná. Výsledkem je v polárním grafu množina bodů stejně vzdálených od počátku, tedy kružnice. V „paprskovém“ grafu bude barva všech „paprsků“ stejná, výsledkem tedy bude jednobarevný čtverec.



Obr. 5.3: „Paprskový“ a polární graf k úkolu 1.



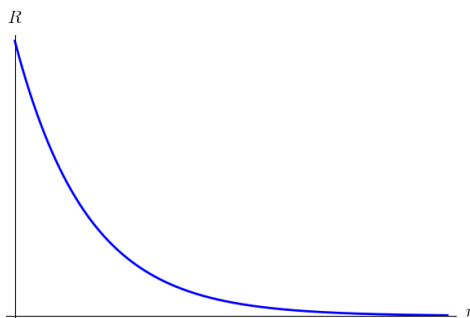
Obr. 5.4: Řešení úkolu 2 – „paprskový“ a polární graf.

Závislost hustoty pravděpodobnosti na vzdálenosti od jádra

Část hustoty pravděpodobnosti závislou na *vzdálenosti od středu atomu* znázorňujeme kartézským grafem, kde na vodorovnou osu vynášíme vzdálenost od jádra (nejčastěji v násobcích Bohrova poloměru).⁴ Zde nám však jde jen o průběh dané funkce, proto v grafech měřítko neuvádíme.

Úkol 3: V úkolu 3 studenti rozhodují, v jaké vzdálenosti od jádra je tato část hustoty pravděpodobnosti nalezení elektronu největší, resp. nejmenší. V grafu na obrázku 5.5 vidíme, že pro základní stav atomu vodíku je hustota pravděpodobnosti vzhledem ke vzdálenosti od jádra největší v jádře, s rostoucí vzdáleností rychle klesá (pokles je exponenciální) a nulová je v nekonečnu.

⁴Bohrův poloměr je vzdálenost od jádra, ve které se elektron v atomu vodíku v základním stavu vyskytuje s největší pravděpodobností. Má hodnotu $a = 5 \cdot 10^{-11}$ m.)



Obr. 5.5: Graf závislosti části hustoty pravděpodobnosti R na vzdálenosti od jádra r pro stav atomu vodíku označovaný jako 1s nebo $(n = 1, l = 0, m = 0)$.

Toto zjištění může vést k otázce, jestli je skutečně celkově nejpravděpodobnější elektron nalézt v jádře. To ovšem není pravda. Pravděpodobnost nalezení elektronu v určité oblasti totiž nezávisí pouze na velikosti hustoty pravděpodobnosti v této oblasti, ale také na tom, jak je daná oblast „velká“. I když je hustota pravděpodobnosti pro malé vzdálenosti od jádra vysoká, jde o velmi malou oblast. Pravděpodobnost, že zde elektron najdeme, je proto malá. Zatímco pro větší vzdálenosti od jádra je hustota pravděpodobnosti sice nižší, ale zato jde o velkou oblast (tenkou kulovou vrstvu s velkým poloměrem), takže se v ní pravděpodobnost „nasčítá“ a ve výsledku může být pravděpodobnost nalezení elektronu v dané vzdálenosti od jádra poměrně vysoká.

Celková hustota pravděpodobnosti

Studenti se seznámili se znázorněním obou částí hustoty pravděpodobnosti pomocí grafů. Nyní tyto znalosti využijí při řešení úkolů 4–6, ve kterých se budou zabývat výsledným tvarem orbitalů atomu vodíku.

Úkol 4: Studenti nejprve pomocí grafů obou částí hustoty pravděpodobnosti znázorní celkovou hustotu pravděpodobnosti nalezení elektronu v atomu vodíku pro několik stavů. Každému stavu odpovídá jeden řádek tabulky 5.1.

V prvním sloupci tabulky 5.1 je graf části hustoty pravděpodobnosti závislé na vzdálenosti od jádra (R), v prostředních dvou sloupcích je polární a „paprskový“ graf úhlové části hustoty pravděpodobnosti (U). Graf celkové hustoty pravděpodobnosti studenti kreslí do připravených rámečků v posledním sloupci tabulky. Využijí při tom znázornění pomocí intenzity barvy.⁵ Na vzorovém prvním řádku tabulky vysvětlíme, jak dospět k výslednému tvaru orbitalu, ostatní řádky studenti vyplňují samostatně či ve skupinkách.

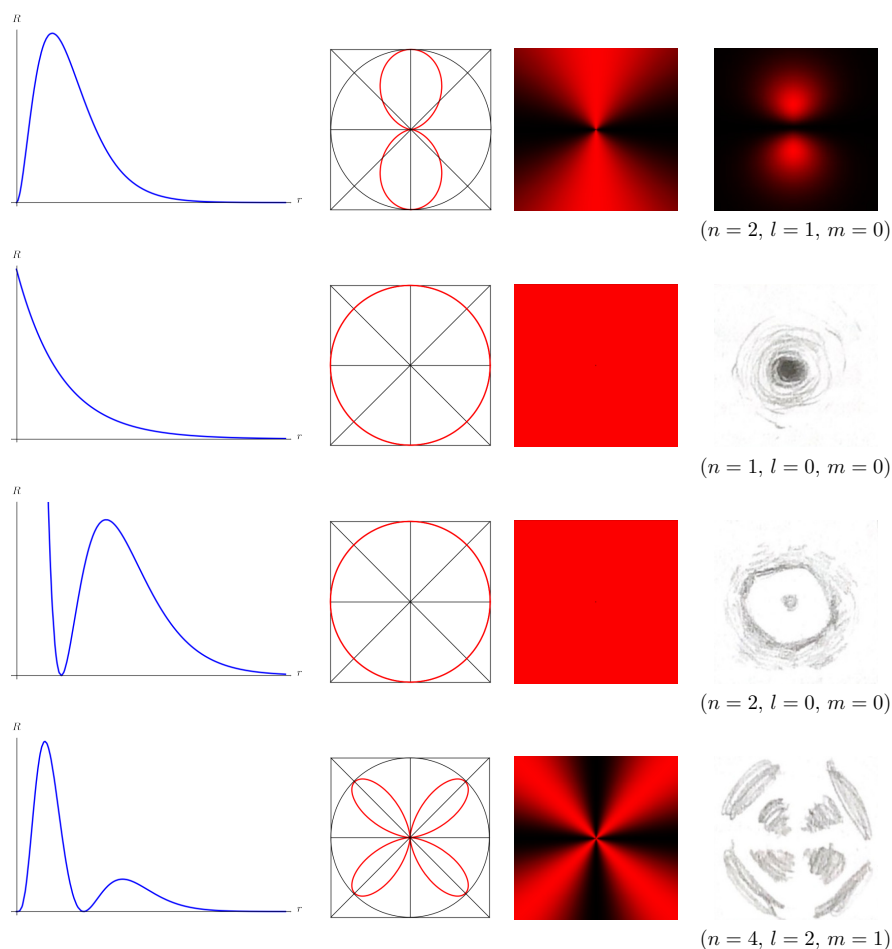
Řešení úkolu 4: Celková hustota pravděpodobnosti ρ je součinem dvou funkcí popisujících dvě části hustoty pravděpodobnosti ($\rho = R \cdot U$). Abychom načrtli výsledný tvar orbitalů, budeme graficky naznačovat přibližnou hodnotu součinu obou částí hustoty pravděpodobnosti. „Paprskový“ nebo polární graf říká, ve kterých směrech je vysoká nebo nízká hustota pravděpodobnosti, nezachycuje ale informaci o tom, jak se mění se vzdáleností od jádra. Můžeme začít tím, že najdeme význačné směry, ve kterých je hustota pravděpodobnosti nejvyšší, resp. nejnižší.

Jako příklad uvedeme vzorové řešení situace v prvním řádku tabulky 5.1. Hustota pravděpodobnosti vzhledem k úhlu je zde nejvyšší ve svislém směru, zatímco ve vodorovném směru je nulová. Kartézský graf říká, jak se mění hustota pravděpodobnosti se vzdáleností od jádra, ale nenese informaci o směru – tato závislost na vzdálenosti je pro každý směr stejná. V našem případě je hustota pravděpodobnosti vzhledem ke vzdálenosti nulová v jádře, blízko jádra má výrazné maximum a pak rychle klesá k nule.

Celkovou hustotu pravděpodobnosti dostaneme tak, že tyto dvě funkce „vynásobíme“. V místech, kde je jedna ze složek hustoty pravděpodobnosti nulová, bude nulová i celková hustota pravděpodobnosti. V našem případě je celková hustota pravděpodobnosti nulová ve vodorovném směru. V ostatních směrech je vyšší a nejvyšší je ve svislém směru. Pro všechny směry platí, že blízko jádra je celková hustota pravděpodobnosti nízká, v určité vzdálenosti od jádra je velká a pak klesá k nule. Tvar orbitalu tedy můžeme v rovině načrtnout jako dvě vystínované „kapky“, které jsou od sebe odděleny místy s nulovou hustotou pravděpodobnosti nalezení elektronu.

Zobrazení řešení: Pro zobrazení tvaru orbitalů můžeme použít obrázky v příložené prezentaci. Druhou možností je použití programu *Orbitaly* [6], který umožňuje zobrazení obou částí hustoty pravděpodobnosti a grafu celkové hustoty pravděpodobnosti pro jednotlivé stavy atomu vodíku. Jednotlivé stavy se nastavují pomocí kvantových čísel (n, l, m) Program umožňuje zobrazit tvar

⁵Měřítka barevné škály ani kartézských grafů není na všech obrázcích stejné, lze tedy navzájem porovnávat pouze jejich tvar.



Tab. 5.1: Ukázka studentského řešení úkolu 4.

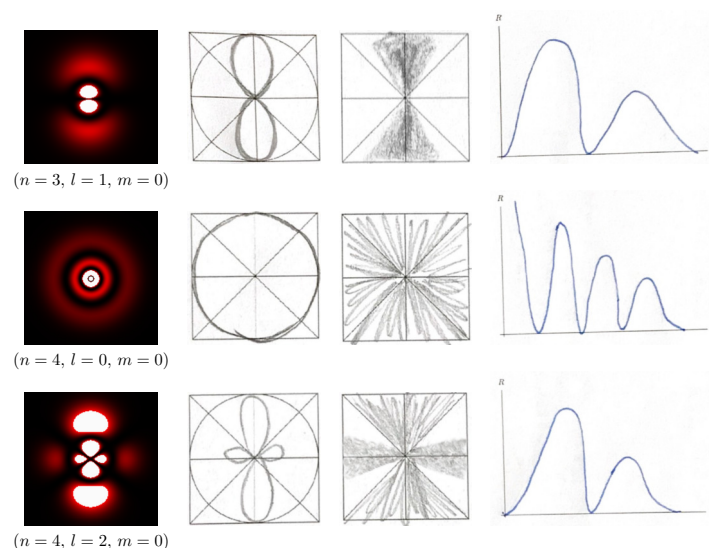
orbitalů i pro další stavy, které nejsou uvedeny v pracovním listě. Jde o starší software, který není možné spustit na mobilních zařízeních, ale pouze na počítači. Je potřeba jej předem nainstalovat (návod je k dispozici v [6]). Program není pro výuku nutný, je zde uveden jako rozšíření.

Úkoly 5 a 6: Úkoly 5 a 6 jsou opačného charakteru než úkol 4, studenti analyzují graf celkové hustoty pravděpodobnosti a zakreslují průběh její úhlové části a části závislé na vzdálenosti od jádra. Úhlovou část mohou zakreslovat pomocí polárního nebo „paprskového“ grafu. Ukázka řešení⁶ je v tabulce 5.2.

Prostorová představa orbitalů

Poslední část pracovního listu je věnovaná prostorové představě tvaru orbitalů atomu vodíku. Studenti si díky válcové symetrii hustoty pravděpodobnosti mohou představit průběh hustoty pravděpodobnosti v prostoru tak, že budou rovinný řez, se kterým pracovali doposud, otáčet kolem svislé osy z . Mohou zkusit vlastními slovy popsat tvary, které tak získají. Pro studenty bývá překvapivé, že nejde vždy o souvislé oblasti, ale např. o kulové vrstvy oddělené kulovou plochou s nulovou hustotou pravděpodobnosti nalezení elektronu. Tato část bývá pro některé studenty velmi zajímavá, pro jiné dost náročná. Můžeme ji vynechat či zadat pouze zájemcům.

⁶Bílá místa na některých obrázcích vznikla nastavením barevné škály tak, aby byla dobře viditelná i místa s nižší hustotou pravděpodobnosti. V bílých oblastech je hustota pravděpodobnosti větší než je nastavená mezní hodnota.



Tab. 5.2: Ukázka studentského řešení úkolů 5 a 6.

Shrnutí

Na závěr shrneme, že orbital chápeme jako část prostoru, ve kterém je hustota pravděpodobnosti nalezení elektronu vyšší než zadaná hodnota. Mezní hodnota je zvolena tak, aby celková pravděpodobnost nalezení elektronu uvnitř orbitalu byla 95 %. Jako orbital se někdy také označují přímo matematické funkce, které popisují hustotu pravděpodobnosti nalezení elektronu v daném stavu. Připomeneme, že zde jsme se zabývali pouze orbitály atomu vodíku, protože pro atomy s více elektrony je situace složitější.

5.5 Rozšiřující komentář:

Následující poznámky se týkají kvantových čísel, jejich souvislosti s tvary orbitalů a odlišnosti popisu orbitalů v chemii. Jsou zde uvedeny pouze pro úplnost, např. jako rozšíření pro pokročilejší studenty a jako propojení s chemií. Pro znázorňování tvaru orbitalů v rámci tohoto materiálu není zavedení kvantových čísel nutné, využijeme ho pouze pro označení stavů v případě, že pracujeme s programem *Orbitaly*.

Kvantová čísla

Kvantová čísla označují jednotlivé stavy elektronu v atomu vodíku. Každému stavu jednoznačně přiřazujeme trojici kvantových čísel (n, l, m), která nazýváme

n	hlavní kvantové číslo,
l	vedlejší kvantové číslo,
m	magnetické kvantové číslo.

Kvantová čísla se objevují při řešení Schrödingerovy rovnice pro atom vodíku, z níž jsou vypočteny funkce popisující hustotu pravděpodobnosti nalezení elektronu v atomu. Z této rovnice také plynou podmínky, které musí kvantová čísla n, l, m splňovat:

$$\begin{aligned}
 n &= 1, 2, 3, \dots, \\
 l &= 0, 1, 2, \dots, n-1, \\
 m &= -l, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, l.
 \end{aligned}$$

Ne každá trojice čísel totiž popisuje možný stav atomu vodíku. Tvary orbitalů atomu vodíku pro několik prvních stavů s nejnižší energií jsou vykresleny v tabulce 5.3 spolu s grafy obou částí hustoty pravděpodobnosti.

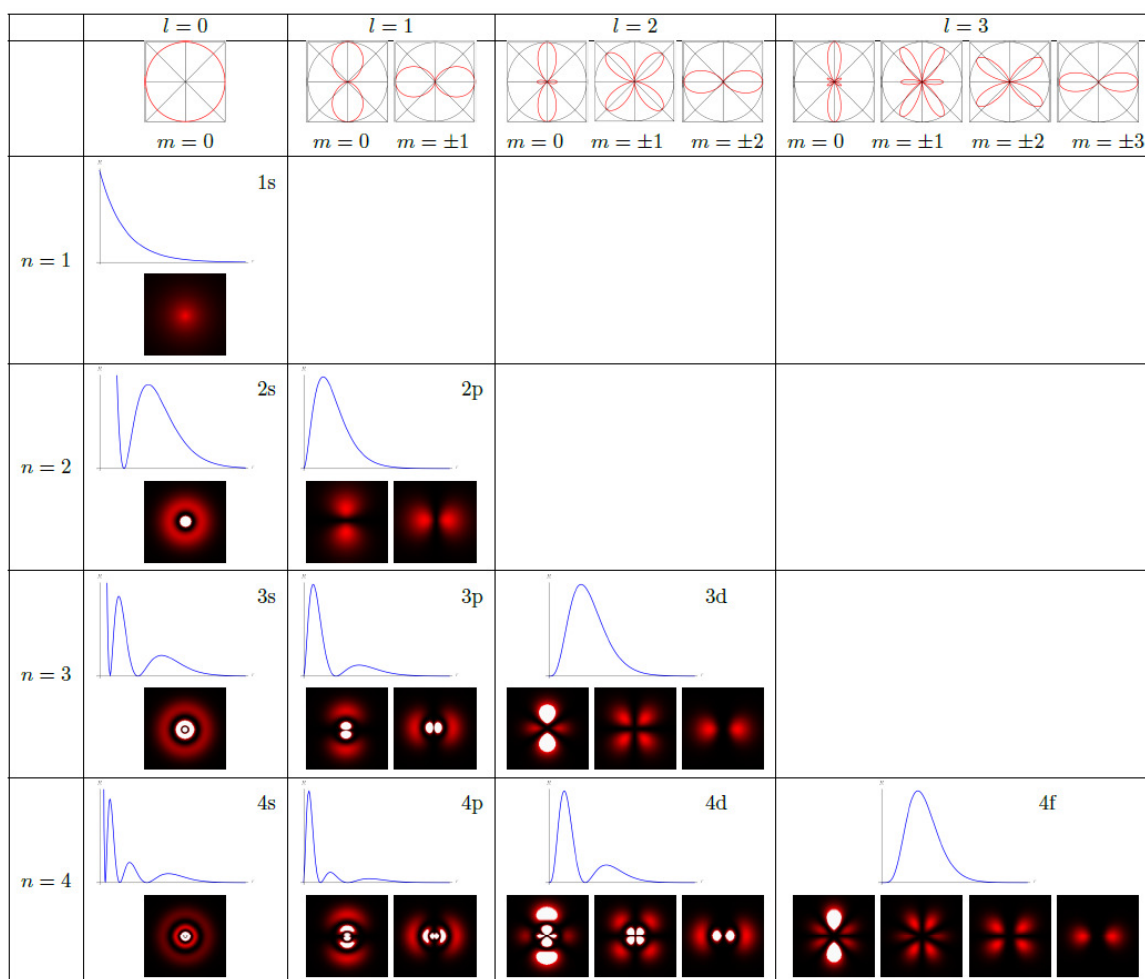
Hlavní kvantové číslo n – určuje energii stavu atomu vodíku, tj. energetickou hladinu elektronu v atomu. Tuto energii vypočteme jako

$$E_n = \frac{-13,6 \text{ eV}}{n^2}.$$

V tabulce 5.3 si můžeme všimnout, že hlavní kvantové číslo ovlivňuje část hustoty pravděpodobnosti závislou na vzdálenosti, souvisí tak s „vrstevnatostí orbitalu“. Neovlivňuje úhlovou část hustoty pravděpodobnosti.

Vedlejší kvantové číslo l ovlivňuje tvar obou částí hustoty pravděpodobnosti. V chemii bývá zvykem orbitaly s kvantovým číslem $l = 0, 1, 2, 3, 4$ nazývat písmeny jako orbitaly s, p, d, f, g. Souvisí s velikostí momentu hybnosti elektronu.

Magnetické kvantové číslo m ovlivňuje tvar úhlové části hustoty pravděpodobnosti, ale ne část závislou na vzdálenosti od jádra. Souvisí s průmětem momentu hybnosti elektronu do osy z .



Tab. 5.3: Tvar orbitalů atomu vodíku pro různá kvantová čísla (n, l, m)

Orbitaly v chemii

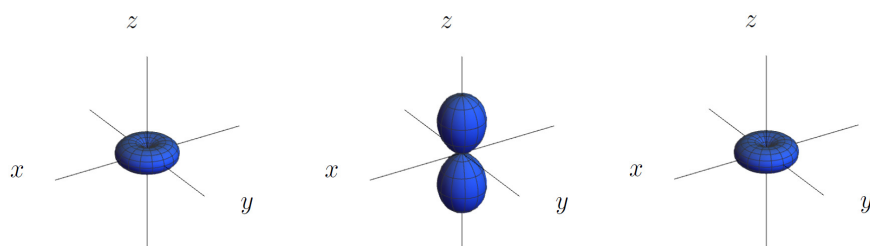
Někteří studenti mohou namítnout, že se v chemii setkali s jinými tvary orbitalů. Jsou pro to dva důvody.

Pro popis chemické vazby a vysvětlení její prostorové orientace je podstatná pouze část hustoty pravděpodobnosti závislá na úhlu. V učebnicích chemie se proto často vyobrazuje pouze tato část a označuje se za orbital. Musíme dát pozor, aby nedošlo k záměně s celkovou hustotou pravděpodobnosti.

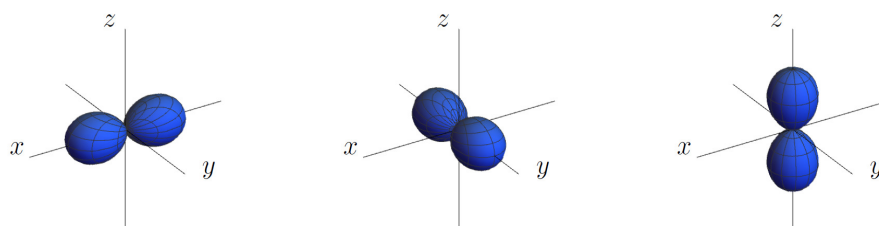
Přes to se však tvar úhlové části hustoty pravděpodobnosti vyobrazovaný v učebnicích chemie a fyziky může lišit. Je to způsobeno tím, že pro popis chemické vazby se lépe hodí funkce, které mají „stejný tvar“, ale různou prostorovou orientaci, zatímco ve fyzice se lépe pracuje s funkcemi, pro něž je význačná svislá osa z . Ve fyzice tak např. úhlovou část orbitalu p (stavu s vedlejším kvantovým číslem $l = 1$) popisujeme pomocí sady tří funkcí na obrázku 5.6a, zatímco v chemii použijeme sadu funkcí 5.6b. Obě sady funkcí odpovídají stavům, kdy má elektron v atomu jasně danou hodnotu energie. Stav, který jsou popsány funkcemi z „fyzikální sady“, mají navíc jasně daný také průmět momentu hybnosti elektronu do osy z (což je ve fyzice výhodné např. pro popis chování atomů v magnetickém poli.) Funkce z „chemické sady“ vznikly „nakombinováním“ funkcí s různým průmětem momentu hybnosti do osy z , proto nemají průmět momentu hybnosti do osy z jasně daný (jde o superpozici několika možností). Zato ale mají „stejný tvar“, který se liší jen natočením v prostoru, což je výhodné pro vysvětlení chemické vazby.

Mezi sadou „fyzikálních funkcí“ a „chemických funkcí“ můžeme podle potřeby přecházet

pomocí matematické transformace,⁷ podobně jako můžeme při řešení nějakého problému přejít od jedné soustavy souřadnic do jiné.



(a) Sada „fyzikálních funkcí“ (magnetické kvantové číslo pro jednotlivé funkce je $m = 1$, $m = 0$, $m = -1$).



(b) Sada „chemických funkcí“ (magnetické kvantové číslo nemá jasně danou hodnotu).

Obr. 5.6: Prostorové znázornění úhlové části hustoty pravděpodobnosti orbitalu p pomocí sady „fyzikálních“ a „chemických“ funkcí.

⁷Touto matematickou transformací je vyjádření každé funkce z jedné sady pomocí superpozice funkcí z druhé sady. Při hledání superpozice ale nelze pracovat s funkcemi popisujícími hustotu pravděpodobnosti – je nutné přejít k vlnovým funkcím. Vztah mezi vlnovou funkcí a hustotou pravděpodobnosti je takový, že hustota pravděpodobnosti je druhou mocninou absolutní hodnoty vlnové funkce. Pro nalezení správné superpozice je podstatné i znaménko vlnové funkce (a také fáze v případě komplexních vlnových funkcí). Tyto informace ale hustota pravděpodobnosti nezachycuje, proto ji k tomuto účelu nelze použít.

Přílohy

Pracovní listy

Přílohy obsahují pracovní listy k jednotlivým modulům:

- Energetické hladiny atomu vodíku
- Dvojtěrbínový experiment
- Nekompatibilní veličiny
- Kvantová kryptografie (varianta s kvantovou kartou)
- Kvantová kryptografie (varianta s polarizací fotonů)
- Kvantově-mechanický model atomu

Energetické hladiny atomu vodíku

Naskládejte tyčky na schéma povolených energetických hladin tak, aby každá tyčka odpovídala přeskoku mezi dvěma hladinami.

- 1) Jakou energii musíme dodat elektronu, aby přešel ze základního stavu do prvního excitovaného stavu? ($n = 1 \rightarrow n = 2$)
- 2) Jakou energii atom vyzáří, když v něm elektron přejde ze třetí na druhou energetickou hladinu? ($n = 3 \rightarrow n = 2$)
- 3) Jakou vlnovou délku má světlo vyzářené při přechodu elektronu ze stavu $n = 3 \rightarrow n = 2$?
Patří do viditelného spektra?

Rozšiřující úlohy:

- 4) Základní hladině jsme přiřadili energii $-13,6$ eV. Pomocí hodnot uvedených na tyčkách dopočítejte hodnoty energie ostatních hladin na ose. (Připište je k hladinám v grafu.)
- 5) Energie n -té hladiny je dána vztahem $E_n = \frac{-13,6 \text{ eV}}{n^2}$. Ověřte, že tomu odpovídají vaše dopočtené hodnoty na ose z předchozího úkolu.
- 6) Pomocí tohoto vztahu určete energii potřebnou přechodu mezi 5. a 6. hladinou.

Dvojštěrbinový experiment

A) Porovnání chování kuliček a vln

- 1) Načrtněte, jak bude vypadat výsledek dvojštěrbinového experimentu v případě
 - a) klasických kuliček
 - b) vlnění (např. vodních vln)

B) Střílíme elektrony

Pro následující úlohy ponechte obě štěrby otevřeny, detektor vypnutý.

- 1) *Vystřelte na stínítko několik elektronů.*
 - a) Jak vypadá stopa po jednom elektronu?
 - b) Umíte předpovědět, kam dopadne další elektron?
- 2) *Vystřelte na stínítko velké množství elektronů (např. 700–1000).*

Na kterých místech stínítka je velká pravděpodobnost, že tam dopadne další vystřelený elektron?
- 3) Načrtněte obrazec, který jste dostali na stínítku a slovně popište, jak vypadá.
- 4) V čem je obrazec vytvořený **elektrony** podobný obrazci vytvořenému
 - a) kuličkami,
 - b) vodními vlnami?

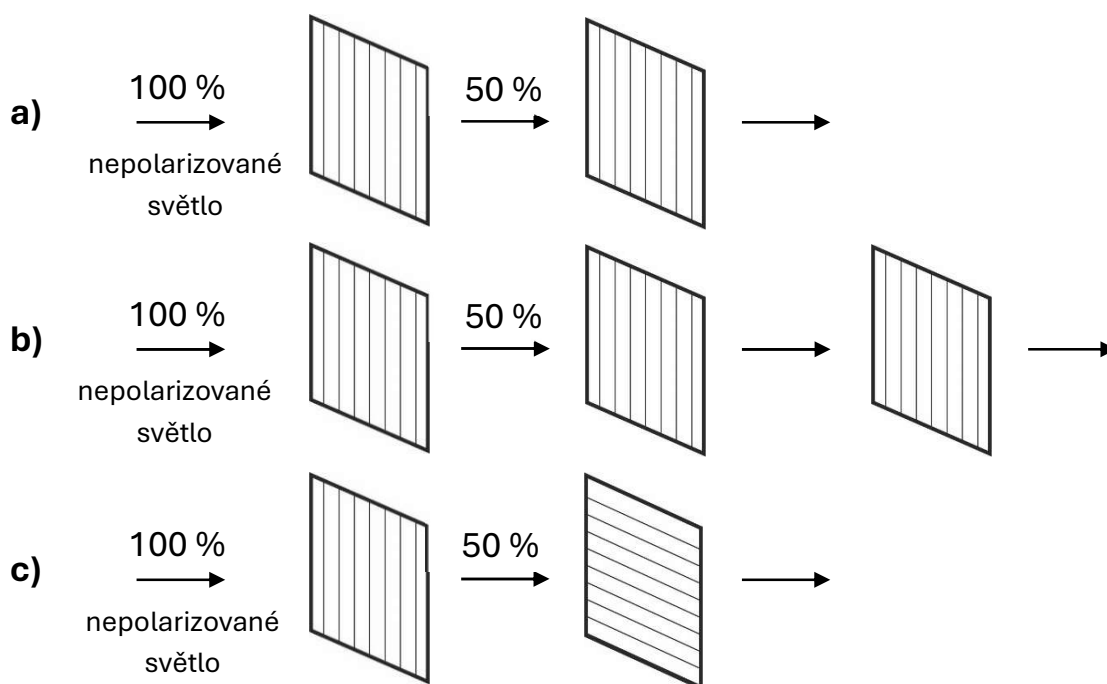
Nekompatibilní veličiny

Příkladem nekompatibilních veličin jsou dvě orientace polarizace fotonů: přímá a šikmá polarizace. Jsou to veličiny, jejichž hodnoty nemohou být dány současně.

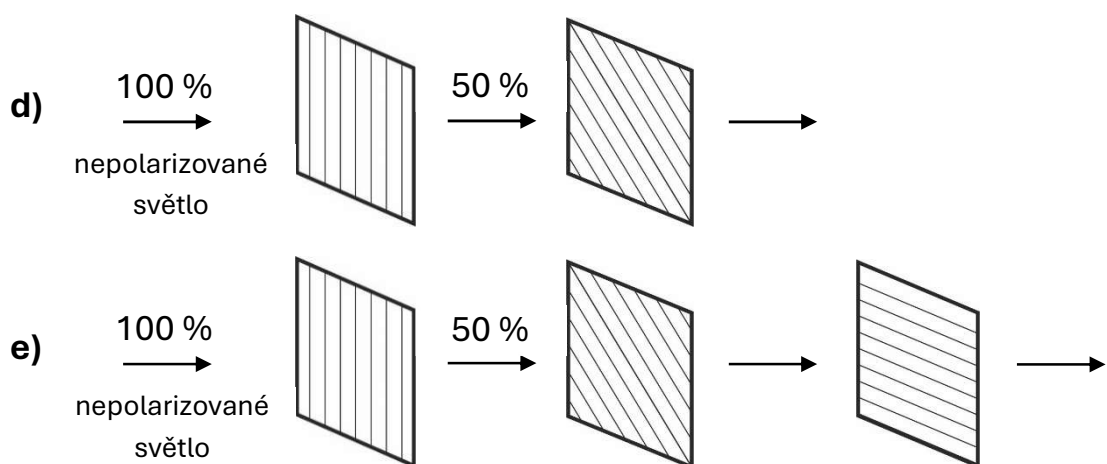
Pozorování intenzity světla

Úkol 1: V následujících situacích nastavte filtry podle obrázků. Pozorujte, jaká část světla projde jednotlivými filtry. Za každý filtr nad šipku doplňte **intenzitu prošlého světla**. (Jako 100 % uvažujte intenzitu světla vstupujícího do daného filtru, ne počáteční intenzitu.) Do prvního filtru vždy vstupuje nepolarizované světlo – např. ze zářivky nebo ze slunce. Polarizační filtr propouští 50 % nepolarizovaného světla.

Měření stejné veličiny vícekrát za sebou – filtry se stejným směrem polarizace



Měření nekompatibilních veličin – filtry se směrem polarizace pootočeným o 45°



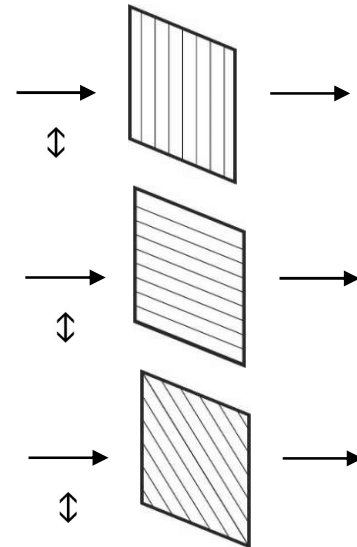
Úkol 2: V situacích a)–e) doplňte za každý filtr pod šipku **směr polarizace**, který má světlo po průchodu filtrem. Směry označte $\leftrightarrow$, $\updownarrow$, $\nearrow$, $\nwarrow$.

Polarizace jednoho fotonu

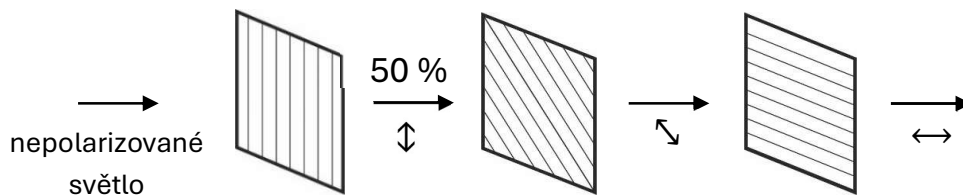
Nyní si představíme, že skrz filtry prochází pouze jeden foton, který má určitou pravděpodobnost filtrem projít, nebo být pohlcen. Tato pravděpodobnost pro jeden foton odpovídá intenzitě prošlého světla (proudu mnoha fotonů).

Úkol 3: Na základě předchozího pozorování intenzity světla určete pravděpodobnost průchodu fotonu filtrem:

- Jaká je pravděpodobnost, že foton se směrem polarizace $\updownarrow$ projde svisle orientovaným filtrem?
- Jaká je pravděpodobnost, že foton se směrem polarizace $\updownarrow$ projde filtrem pootočeným o 90° ?
- Jaká je pravděpodobnost, že foton se směrem polarizace $\updownarrow$ projde filtrem pootočeným o 45° ?



- Za každý filtr nad šipku doplňte, jaká je pravděpodobnost, že foton projde daným filtrem:



Shrnutí:

- Když **měříme stejnou veličinu vícekrát po sobě** (např. pomocí stejně natočených polarizačních filtrů), mají všechna měření vždy **stejný / různý** výsledek.
- Když **měříme dvě nekompatibilní veličiny** tak, že nejprve změříme hodnotu jedné veličiny a následně druhé veličiny (např. přímoú a šikmou polarizaci pomocí filtrů pootočených o 45°), výsledky druhého měření jsou **vždy stejné / náhodné** – můžeme dostat **jen jednu možnost / obě možnosti se stejnou pravděpodobností**. Měření v kvantové fyzice **je / není** jen pasivní proces – **může měnit / nemění** vlastnosti měřených objektů.
- V situaci se třemi filtry** měly fotony za prvním filtrem směr polarizace . Pravděpodobnost, že by fotony s tímto směrem polarizace prošly kolmo natočeným třetím filtrem, je . Měření šikmé polarizace prostředním filtrem způsobilo, že měly fotony za druhým filtrem polarizaci ve směru , nebo , takže pravděpodobnost jejich průchodu posledním filtrem byla %.

Kvantová kryptografie

Šifrování zprávy pomocí klíče:

Alice:	Zpráva:
	Klíč:
	Šifrovaná zpráva:
Bob:	Klíč:
	Dešifrovaná zpráva:

Kvantové přenášení klíče – protokol BB84

[illegible]

Odposlech při kvantovém přenášení klíče

[illegible]

Kvantová kryptografie

Šifrování zprávy pomocí klíče:

Alice:	Zpráva:
	Klíč:
	Šifrovaná zpráva:
Bob:	Klíč:
	Dešifrovaná zpráva:

Kvantové přenášení klíče – protokol BB84

[illegible]

Odposlech při kvantovém přenášení klíče

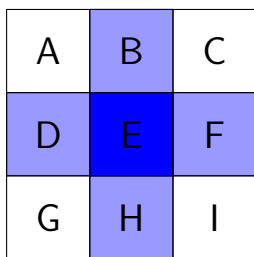
[illegible]

Kvantově-mechanický model atomu

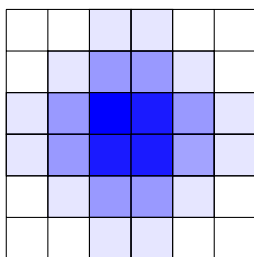
Hustota pravděpodobnosti

Hustota pravděpodobnosti nalezení elektronu říká, **jaká je pravděpodobnost najít elektron na různých místech v atomu.**

Její rozložení jsme znázorňovali ve hře kvantové lodě jako kombinaci několika polí s různou vahou. Když budeme velikost polí neustále zjemňovat, dostaneme kombinaci „nekonečně mnoha nekonečně malých polí“. Část prostoru, ve kterém je hustota pravděpodobnosti nalezení elektronu vyšší než zadaná hodnota, označujeme jako *orbital*. Mezní hodnota se volí tak, aby celková pravděpodobnost nalezení elektronu uvnitř orbitalu byla 95 %.



(a) Superpozice několika polí



(b) Superpozice více polí



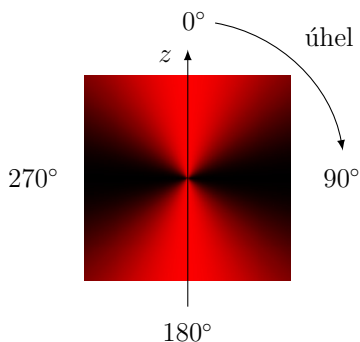
(c) Superpozice „nekonečně mnoha polí“

Pro popis orbitalů použijeme opačnou barevnou škálu než při práci s fóliemi: nízká intenzita – černá/tmavá červená, vysoká intenzita – světlá červená/bílá.

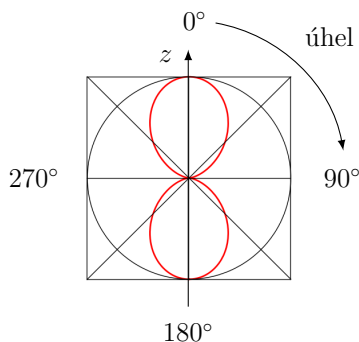
Orbitaly atomu vodíku

Závislost hustoty pravděpodobnosti na směru (úhlu)

Část hustoty pravděpodobnosti podle toho, *kterým směrem od středu atomu jdeme*, znázorňujeme „paprskovým“ nebo polárním grafem.

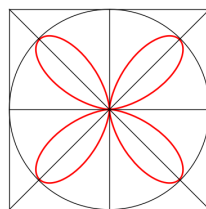
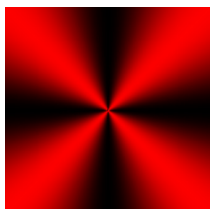


(a) „Paprskový graf“

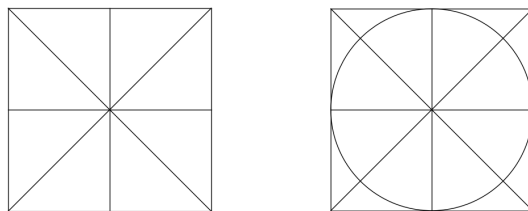


(b) Polární graf

1) Ve kterém směru je hustota pravděpodobnosti největší, resp. nejmenší?

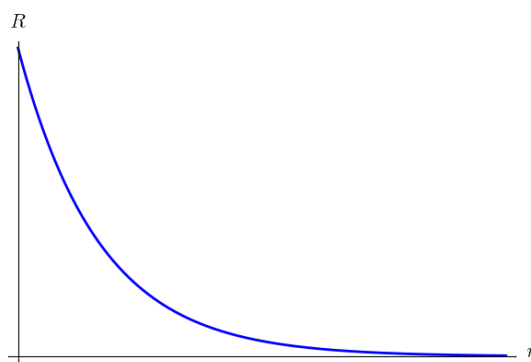


2) Nakreslete „papřskový“ i polární graf, pokud je hustota pravděpodobnosti ve všech směrech stejná.



Závislost hustoty pravděpodobnosti na vzdálenosti od jádra

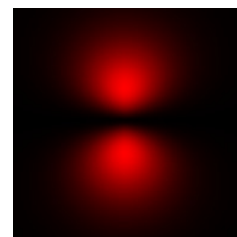
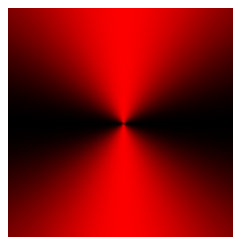
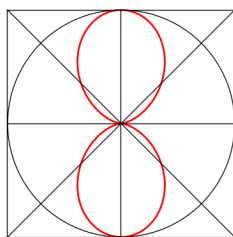
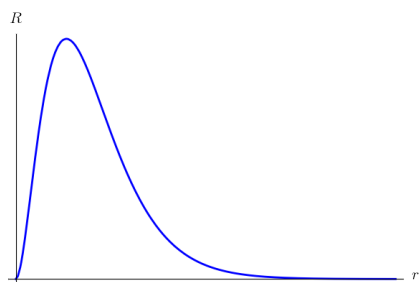
Část hustoty pravděpodobnosti závislou na *vzdálenosti od jádra* znázorňujeme kartézským grafem, kde na vodorovnou osu vynášíme vzdálenost od jádra¹.



3) Naznačte do grafu výše, v jaké vzdálenosti od jádra je část hustoty pravděpodobnosti nalezení elektronu (R) největší, resp. nejmenší.

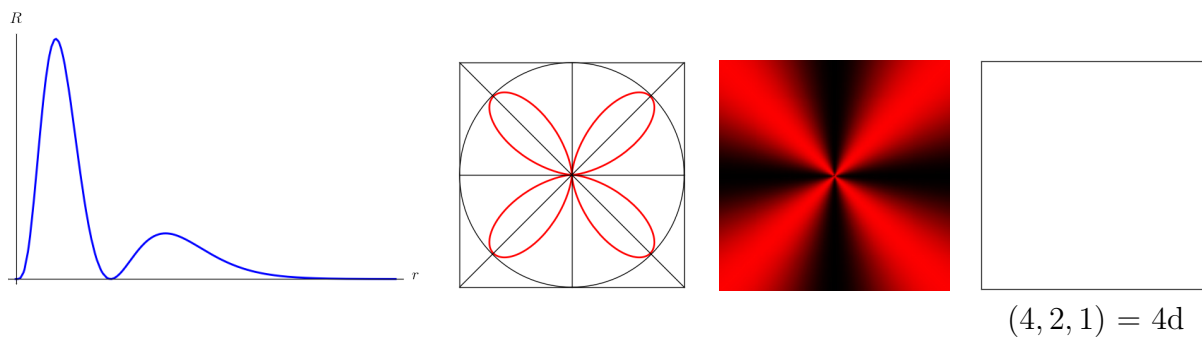
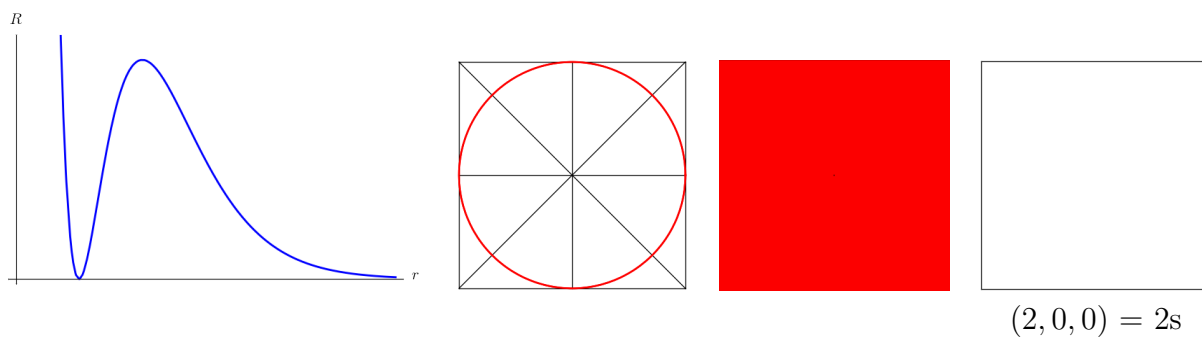
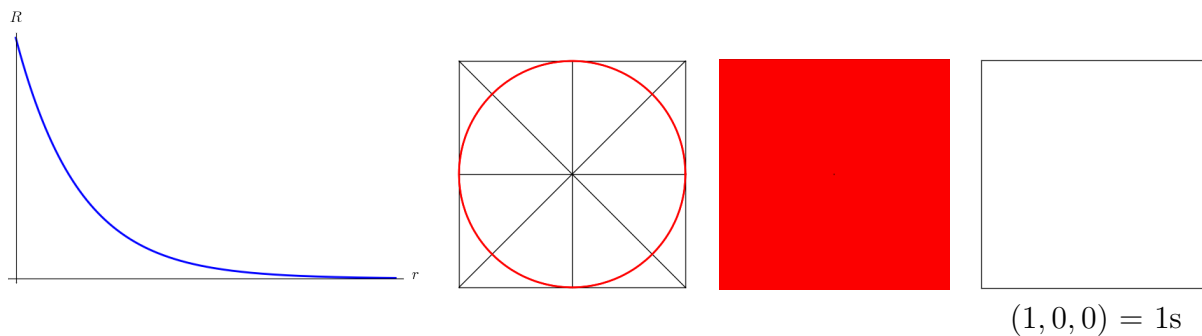
Celková hustota pravděpodobnosti

4) Na základě části hustoty pravděpodobnosti závislé na vzdálenosti od jádra a úhlové části hustoty pravděpodobnosti (zobrazené polárním i „papřskovým“ grafem) nakreslete do rámečku vpravo celkovou hustotu pravděpodobnosti nalezení elektronu v atomu vodíku pro několik stavů atomu vodíku. První řádek použijte jako vzor. Stavy jsou označeny trojicí kvantových čísel (n, l, m) v závorce a chemickým názvem.

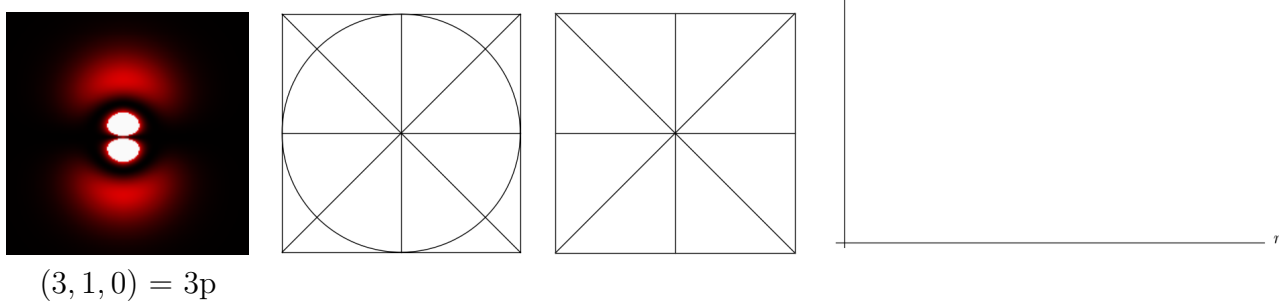


$(2, 1, 0) = 2p$

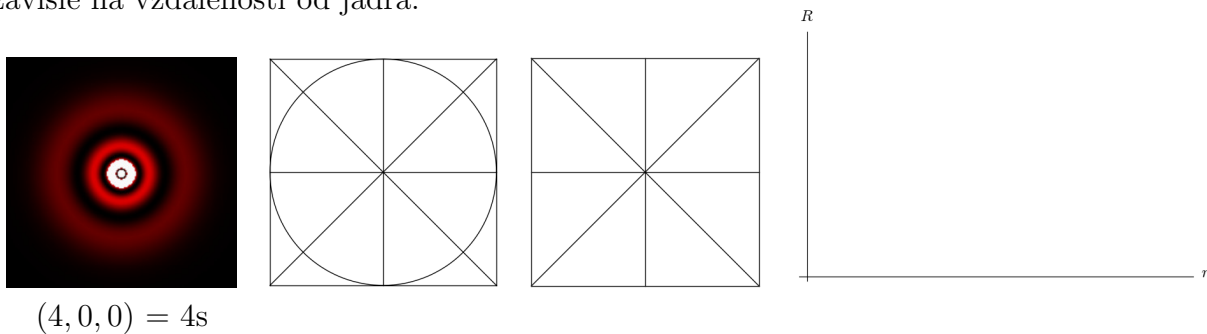
¹Nejčastěji v násobcích Bohrova poloměru $a = 5 \cdot 10^{-11}$ m. Zde nám však jde jen o průběh dané funkce, proto měřítko neuvádíme.

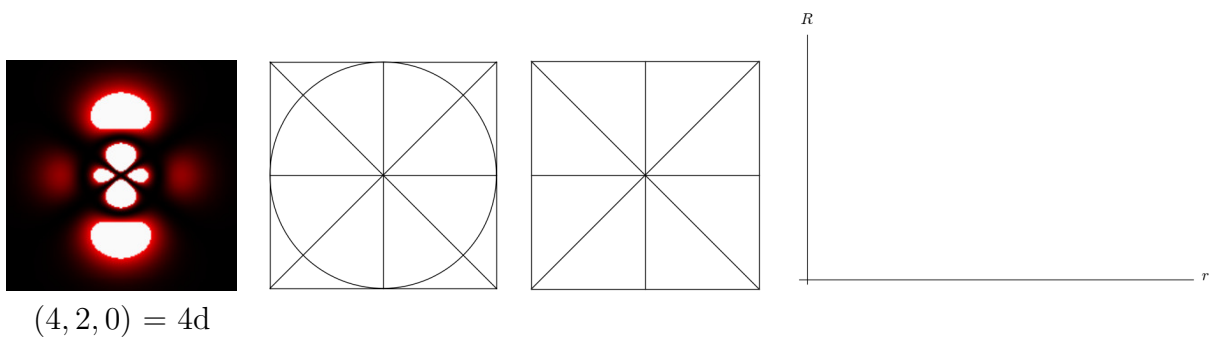


5) Na základě celkové hustoty pravděpodobnosti načrtněte průběh její úhlové části a části závislé na vzdálenosti od jádra. (Bílá barva znamená hustotu pravděpodobnosti vyšší než odstíny červené.)



6) Na základě celkové hustoty pravděpodobnosti načrtněte průběh její úhlové části a části závislé na vzdálenosti od jádra.





Prostorová představa orbitalů

7) Podívejte se na svá řešení úkolu 4) a představte si, že je budete otáčet kolem osy z . Pokuste se vlastními slovy (klidně nematematickými a nefyzikálními) popsat tvary, které tak dostanete. Jde vždy o souvislé oblasti?

8) Na závěr napište vlastními slovy, co je to podle vás orbital.

Reference

- [1] PhET interactive simulations: Photoelectric Effect. URL: <https://phet.colorado.edu/sims/cheerpj/quantum-wave-interference/latest/quantum-wave-interference.html?simulation=quantum-wave-interference>.
- [2] PhET interactive simulations: Quantum wave interference. URL: <https://phet.colorado.edu/sims/cheerpj/quantum-wave-interference/latest/quantum-wave-interference.html?simulation=quantum-wave-interference>.
- [3] The Original Double Slit Experiment. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=Iuv6hY6zsd0&t=257s>.
- [4] Roger Bach, Damian Pope, Sy Hwang Liou, and Herman Batelaan. Controlled double-slit electron diffraction. *New Journal of Physics*, 15, 3 2013. doi:10.1088/1367-2630/15/3/033018.
- [5] Maria Bondani and Valentina De Renzi. Highlights of the “quantum” exhibition: How to exploit ad-hoc designed demonstrators and staging activities to introduce quantum physics to a general audience. In *Proceedings of the GIREP Conference 2025*, 2025.
- [6] Zdeňka Broklová and Jan Koupil. Orbitaly 3D. URL: <https://kdf.mff.cuni.cz/~koupilova/orbitals/index.php?lang=CZ>.
- [7] Technical University Delft. Quantum computers. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=eGYuTuTxoJE>.
- [8] Katedra didaktiky fyziky Matematicko-fyzikální fakulty UK. Sbírka fyzikálních pokusů: Dvojtěrbinový pokus. URL: <https://fyzikalnipokusy.cz/1658/dvojsterbinovy-pokus>.
- [9] Katedra didaktiky fyziky Matematicko-fyzikální fakulty UK. Sbírka fyzikálních pokusů: Spektra běžných světelných zdrojů. URL: <http://fyzikalnipokusy.cz/1839/spektra-beznych-svetelných-zdroju>.
- [10] Albert Einstein. *Einstein on Cosmic Religion and Other Opinions and Aphorisms*. Dover Publication, 1931.
- [11] Şengül Atasoy and Serap Ergin. The effect of concept cartoon-embedded worksheets on grade 9 students’ conceptual understanding of newton’s laws of motion. *Research in Science and Technological Education*, 35:58–73, 1 2017. doi:10.1080/02635143.2016.1248926.
- [12] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 3/3*. Fragment, Praha, 1. vydání edition, 2002.
- [13] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, volume 3. Addison Wesley Longman, 6 edition, 1977.
- [14] Richard P. Feynman. *QED: The Strange Theory of Light and Matter*. Princeton University Press, 1985.

- [15] Allan Goff. Quantum tic-tac-toe: A teaching metaphor for superposition in quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 74:962–973, 11 2006. doi:10.1119/1.2213635.
- [16] Aleš Lacina and Hana Martinásková. Fotoelektrický jev. Technical report, Přírodovědecká fakulta Masarykovy Univerzity, 2005. URL: <http://www.physics.muni.cz/kof/clanky/fotoefekt.pdf>.
- [17] Jana Legerská. Dvojštěrbínový experiment s elektrony. URL: https://fyzweb.cz/materialy/kvantovka/Double_slit_experiment.html.
- [18] Jana Legerská. Interactive visualisation for teaching a quantum double slit experiment. *Journal of Physics: Conference Series*, 2693:012009, 2024. doi:10.1088/1742-6596/2693/1/012009.
- [19] Tomáš Popek. *Sady pro demonstrační experimenty ve středoškolské výuce fyziky mikrosvěta*. PhD thesis, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2021.
- [20] Merel A Schalkers, Kamiel Dankers, Michael Wimmer, and Pieter Vermaas. Explaining grover’s algorithm with a colony of ants: a pedagogical model for making quantum technology comprehensible. *Physics Education*, 59:035003, 2024. doi:10.1088/1361-6552/ad2976.