

# 1 Postupná měření energie

## Použitý aplet

V současné době je k dispozici pouze anglická verze apletu, na českém překladu se pracuje.

**Funkce apletu:** Aplet provádí měření energie částice v nekonečně hluboké jámě či harmonickém oscilátoru při konkrétním zadaném stavu před měřením.

**Zaměření práce s apletem:** Změna stavu popisu systému při měření a výsledky opakovaných měření.

**Popis a ovládání apletu:** Odkaz na aplet nás zavede na úvodní stránku části *Simulation*, na které se v horní levé části nachází graf zobrazující hustotu pravděpodobnosti částice ve zkoumaném stavu. V dolní části okna apletu jsou ovládací panely, kterými můžeme nastavit stav před měřením, provádět samotná měření a zvolit, zda se bude jednat o částici v nekonečně hluboké jámě nebo harmonický oscilátor. Bližší vysvětlení jednotlivých prvků se uživateli zobrazí po kliknutí na symboly otazníků.

Do druhé části apletu se dostaneme pomocí tlačítka *Challenges*. V této části je nám položeno pět otázek, které můžeme zaškrtnutím odpovědí vyřešit a své řešení si hned zkontrolovat.

**Simulation** **Challenges** **QuVis**

### Successive energy measurements ?

Consider a quantum particle confined to move in one dimension, in a system with either an infinite square well or a harmonic oscillator potential energy. The graph shows you the probability density of the particle. Use the buttons to choose different initial states and to perform up to two successive energy measurements, with the system being unperturbed between measurements. Press the "?" buttons for additional information on the displayed quantities. Then try the challenges in the Challenges tab!

Outcomes	Theoretical Probabilities
Outcome $E = E_1$ :	0%
Outcome $E = E_2$ :	100%
Outcome $E = E_3$ :	0%

**State prior to measurement ?**

$\Psi_2$         $1/\sqrt{2} (\Psi_1 + \Psi_2)$

$1/\sqrt{5} (\Psi_1 - 2\Psi_2)$         $1/\sqrt{2} (\Psi_2 + \Psi_3)$

**Main controls ?**

Perform 1st energy measurement

Show expression for  $|\Psi|^2$  ?

**Potential energy ?**

Infinite well:  
 $n = 1, 2, 3, \dots$  Ground state:  $n = 1$

Oscillator:  
 $n = 0, 1, 2, \dots$  Ground state:  $n = 0$

Eigenfunctions  $\Psi_n(x, t) = u_n(x)\exp(-iE_n t/\hbar)$

Obr. 1: Úvodní stránka apletu

## Zadání úloh

**Úloha 1** Seznamte se s ovládáním a fungováním simulace. Vyzkoušejte si přepínání různých systému, stavů a proved'te měření.

**1.1** Volte různé počáteční stavy a proved'te měření a pozorujte hodnoty zobrazované v oddíle *Theoretical Probabilities*. Pokuste se vysvětlit, proč se někdy uváděné hodnoty pravděpodobností při měření změny a jindy ne.

**1.2** Jak souvisí výsledek prvního a druhého měření?

**1.3** Pozorujte, ve kterých částech experimentu (před prvním měřením, mezi prvním a druhým měřením, po druhém měření) může být hustota pravděpodobnosti časově závislá a ve kterých není.

**Úloha 2** Povšimněte si, že první ze čtyř uvedených stavů je vlastní stav energie. Další tři stavy jsou superpozicí dvou vlastních stavů energie.

**2.1** Popište rozdíl mezi teoreticky určenými pravděpodobnostmi naměřených jednotlivých hodnot energie před a po měření v závislosti na tom, který ze čtyř uvedených stavů byl zvolen.

**2.2** Popište rozdíl mezi stavy před a po měření. Záleží na tom, jaký stav byl zvolen?

**2.3** Pro které stavy je hustota pravděpodobnosti závislá na čase?

**2.4** Pro které stavy jsou pravděpodobnosti jednotlivých výsledků měření závislé na čase?

**Úloha 3** Uvažujme jednu částici v nekonečné potenciálové jámě. Provedeme právě jedno měření a naměříme hodnotu energie  $E_5$ .

**3.1** Co můžeme říct o kvantovém stavu před tímto měření?

**3.2** Uved'te příklady možných stavů před měření.

**3.3** Které z následujících vlnových funkcí nemohly popisovat stav částice před měřením?

a)  $\frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_1 + \psi_3 + \psi_5)$

b)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2)$

c)  $\frac{1}{\sqrt{5}}(\psi_1 - \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - \psi_5)$

d)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_5)$

e)  $\frac{1}{\sqrt{4}}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_5)$

**Úloha 4** Přepněte aplet do části *Challenges* a vyřešte zadané problémy (zde jsou uvedena jejich zadání, aplet v levé části zobrazuje stav částice a umožňuje provést měření).

**4.1** Částice se nachází v nekonečné potenciálové jámě. Proved'te první měření energie této částice. Pokud byste provedli další měření, jakou energii byste naměřili po druhém měření?

**4.2** Částice se nachází v nekonečné potenciálové jámě. Proved'te první měření energie této částice. Pokud byste prováděli další měření, jakou energii byste naměřili po pátém měření?

**4.3** Částice se nachází v nekonečné potenciálové jámě. Proved'te první měření energie této částice. Které z níže uvedených stavů mohly popisovat stav částice před měřením? (Poznámka: Počáteční stav částice je u tohoto i následujících úkolů skrytý).

**4.4** Částice se nachází v harmonickém oscilátoru. Proved'te první měření energie této částice. Které z níže uvedených stavů mohly popisovat stav částice měřením?

**4.5** Částice se nachází v harmonickém oscilátoru. Proved'te první měření energie této částice. Které z níže uvedených stavů mohly popisovat stav částice měřením?

## Řešení úloh

### Úloha 1

**1.1** Zobrazované hodnoty pravděpodobnosti naměření jednotlivých hodnot energie se při provedení měření nezmění v případě, že bylo možné naměřit pouze jednu hodnotu energie. Pokud jsou pravděpodobnosti i naměření nenulové pro více než jednu hodnotu energie, pak se změní. Po měření bude systém vždy ve stavu, ve kterém má pouze jedna hodnota energie nenulovou pravděpodobnost naměření, tj. pravděpodobnost naměření této hodnoty bude 100 %, a navíc se jedná o hodnotu, kterou jsme naměřili.

**1.2** Za předpokladu, že se stav systému mezi měřeními nezměnil, bude výsledek druhého měření vždy stejný, jako výsledek prvního měření.

**1.3** Hustota pravděpodobnosti nalezení je časově závislá pouze v nestacionárních stavech, tj. ve stavech, ve kterých je možné naměřit více než jednu hodnotu energie. Hustota pravděpodobnosti tedy může být časově závislá pouze před prvním měřením. Po měření systém přejde do stacionárního (vlastního) stavu a jeho hustota pravděpodobnosti na čase nezávisí.

### Úloha 2

**2.1** Pokud naším zvoleným stavem byl vlastní stav energie tj. stav popsáný vlastní funkcí  $\psi_2$ , pak naměřená hodnota energie bude vždy  $E_2$ . Pokud je ovšem zvoleným stavem superponovaný stav, např. stav  $1/\sqrt{2}(\psi_1 + \psi_2)$ , pak můžeme naměřit obě hodnoty energií  $E_1$  a  $E_2$ , a to s pravděpodobností 50 %.

**2.2** Proces měření vždy změní původní kvantový stav na vlastní stav korespondující s měřenou hodnotou energie. Pokud byl naším zvoleným stavem před měřením vlastní stav energie, bude popisovat stav částice i po měření. Pokud je zvoleným stavem před měřením superponovaný stav, např. stav  $1/\sqrt{2}(\psi_2 + \psi_3)$ , pak se po změření hodnoty  $E_2$ , respektive  $E_3$ , původní stav změní na vlastní stav popsáný vlastní funkcí  $\psi_2$ , respektive  $\psi_3$ .

**2.3** Hustota pravděpodobnosti je závislá na čase pouze pro superponované stavy. Z uvedených stavů je to tedy  $1/\sqrt{2}(\psi_1 + \psi_2)$ ,  $1/\sqrt{5}(\psi_1 - 2\psi_2)$  a  $1/\sqrt{2}(\psi_2 + \psi_3)$ .

**2.2** Pravděpodobnosti naměření nejsou závislé na čase, jsou dány reálnými koeficienty  $c_n$ .

### Úloha 3

**3.1** Stav před měřením mohl být vlastním stavem  $\psi_5$  nebo libovolným superponovaným stavem, pro který platilo  $c_5 \neq 0$ .

**3.2** Libovolný stav splňující předchozí podmínky, např.  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_5)$ .

#### 3.3

a)  $\frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_1 + \psi_3 + \psi_5)$

V tomto stavu jsme mohli energii  $E_5$  naměřit s pravděpodobností  $(\frac{1}{\sqrt{3}})^2$ .

b)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2)$

Stav nesplňuje podmínky,  $c_5 = 0$ , pravděpodobnost naměření energie  $E_5$  je tedy nulová.

c)  $\frac{1}{\sqrt{5}}(\psi_1 - \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - \psi_5)$

V tomto stavu jsme mohli energii  $E_5$  naměřit s pravděpodobností  $(\frac{1}{\sqrt{5}})^2$ .

d)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_5)$

V tomto stavu jsme mohli energii  $E_5$  naměřit s pravděpodobností  $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ . Nesmíme zapomenout, že při výpočtu pravděpodobnosti počítáme druhou mocninu z velikosti  $c_5$ .

e)  $\frac{1}{\sqrt{4}}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_5)$

V tomto stavu jsme mohli energii  $E_5$  naměřit s pravděpodobností  $\frac{1}{3}$ . Tato funkce není normovaná, musíme ji tedy nejprve nanormovat vynásobením  $\sqrt{\frac{4}{3}}$ .

Druhou možností je spočítat kvadráty velikostí příslušných koeficientů, které i u nenormované vlnové funkce udávají správně poměry naměření jednotlivých hodnot energie. U této vlnové funkce zjistíme, že můžeme naměřit právě tři hodnoty a to se stejnou pravděpodobností. Tato pravděpodobnost musí tedy být  $\frac{1}{3}$ .

### Úloha 4

**4.1 a 4.2** Po provedení prvního měření energie dostaneme vlastní stav energie, ve kterém částice zůstane i po každém dalším měření (za předpokladu, že se stav mezi měřeními nezmění). Hodnotu první naměřené energie můžeme vyčíst z grafu, kde počet maxim odpovídá kvantovému číslu, tedy např. 2 maxima  $\rightarrow$  vlastní stav odpovídající energii  $E_2$ .

4.3, 4.4 a 4.5 Stav před měřením mohl být buď vlastním stavem  $\psi_n$ , anebo libovolným superponovaným stavem, pro který platilo  $c_n \neq 0$ . Příklad správného řešení si můžeme prohlédnout na Obr. 2.

The screenshot shows a simulation interface with two tabs: 'Simulation' and 'Challenges'. The 'Challenges' tab is active, displaying a problem titled 'Successive energy measurements'. The problem text states: 'The quantum particle is confined in an infinite square well. Take a single energy measurement of the particle. Which of the states below could be the initial state of the particle prior to measurement? Choose one or more.' The score is 20/100.

On the left, a graph shows the probability density  $|\psi|^2$  versus position  $x$ . The well extends from  $x=0$  to  $x=L$ . The graph shows a blue curve with two peaks, one centered at  $x=L/2$  and another centered at  $x=3L/4$ . The x-axis is labeled with  $0$ ,  $L/2$ , and  $L$ .

Below the graph is a 'Main controls' section with a button labeled 'Perform 1st energy measurement'.

On the right, there are four multiple-choice options with checkboxes:

- $\psi_1$
- $\psi_2$
- $1/\sqrt{2}(\psi_1 + \psi_2)$
- $1/\sqrt{2}(\psi_2 + \psi_3)$

A 'Submit' button is located at the bottom right of the challenge area.

Obr. 2: Příklad správného řešení pro úlohu 4.3

Tento pracovní list vznikl v rámci bakalářské práce Martina Landy (KDF MFF UK, 2021). Úlohy byly částečně převzaty z pracovního listu [quvis](https://quvis.org/). Podrobnější odkazy jsou k nalezení v bakalářské práci.