

## 2 Superponované vs. smíšené stavy

### Použitý aplet

**Funkce apletu:** Aplet zobrazuje pravděpodobnosti naměření jednotlivých hodnot spinu částice se spinem  $\frac{1}{2}$  a neurčitost měření spinu pro konkrétní orientaci Stern- Gerlachova přístroje (dále jen SGp). Bližší popis se nachází na titulní stránce apletu.

**Zaměření práce s apletem:** Rozdíl mezi superponovaným a smíšeným stavem, jejich odlišení pomocí měření.

**Ovládání apletu:** Odkaz nás zavede na úvodní stránku apletu obsahující podrobnější popis funkcí apletu. Kliknutím na tlačítko *K animaci* se dostaneme k ovládání apletu. V oddílu *Jaké částice vstupují do SGp* si volíme stav částic, které budou vstupovat do SGp. V oddílu *Co zobrazit* si můžeme zvolit, které informace chceme mít aktuálně zobrazené a které skryté. Oddíl *Ovládání zdroje částic* obsahuje tři tlačítka sloužící k vysílání částic do experimentu. Pokud si přejeme začít měření od začátku, použijeme tlačítko *Vynulovat měření* v oddílu *Počet měření*. Aplet umožňuje orientovat SGp ve směru osy  $z$  nebo  $x$  přepínáním v horní části apletu. Kliknutím na záložku *Vysvětlení* zobrazíme dodatečné informace a úlohy k práci s apletem.

Obr. 1: Obrazovka apletu

## Zadání úloh

**Úloha 1** Nastavte si aplet tak, jak zobrazuje obr. 2. SGp tedy bude orientován do osy  $z$  a budeme do něj vysílat částice ve vlastním stavu s kladnou hodnotou průmětu spinu do osy  $z$  tj. ve stavu  $|\uparrow\rangle$ . Vyšlete souvislý proud částic a pozorujte hodnoty pravděpodobností naměřených vlastních čísel.

Obr. 2: Nastavení apletu pro úlohu 1

**1.1** Pokuste se vlastními slovy popsat, co se v simulaci děje. Jaké jsou v tomto stavu pravděpodobnosti naměřených  $S_z = +\hbar/2$  a  $S_z = -\hbar/2$ ? K jaké dojde změně, pokud orientujeme SGp do osy  $x$ ?

**1.2** Proved'te stejná měření s částicemi ve vlastním stavu  $|\downarrow\rangle$  a opět situaci popište.

**Úloha 2** V oddílu *Jaké částice vstupují do SGp* zvolte třetí možnost **Smíšený stav**.

**2.1** Pokuste se vlastními slovy vysvětlit, v jakých stavech jsou jednotlivé částice vysílané do SGp.

**2.2** Zvolte orientaci SGp do osy  $z$ , vyšlete souvislý proud částic a pozorujte pravděpodobnosti naměření jednotlivých vlastních čísel. Poté pokus opakujte pro orientaci SGp do osy  $x$ . Pokuste se vlastními slovy popsat, co se v simulaci děje.

**2.3** Proč jsou pravděpodobnosti naměření vlastních čísel  $+\hbar/2$  a  $-\hbar/2$  stejné pro obě orientace SGp?

**Úloha 3** V oddílu *Jaké částice vstupují do SGp* zvolte čtvrtou možnost **Superpozice**.

**3.1** Pokuste se vlastními slovy vysvětlit, v jakých stavech jsou jednotlivé částice vysílané do SGp. Jaké jsou rozdíly a podobnosti oproti Smíšenému stavu z předchozí úlohy?

**3.2** Výpočtem ukažte, proč v tomto případě nemůžeme naměřit hodnotu  $S_x = -\hbar/2$ .

Nápověda:  $|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$  a  $|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$ .

**3.3** Rozhodněte o správnosti následujícího tvrzení:

Kvantový stav  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  znamená, že systém velmi rychle "přepíná" mezi stavy  $|\uparrow\rangle$  a  $|\downarrow\rangle$ . Částice se tedy polovinu času nacházejí v jednom z těchto stavů, a druhou polovinu času v druhém stavu. Můžeme tedy říct, že s pravděpodobností 50 % je systém v daném okamžiku ve stavu  $|\uparrow\rangle$  nebo ve stavu  $|\downarrow\rangle$ .

**Úloha 4** V oddílu *Jaké částice vstupují do SGp* se zaměřte na poslední dvě možnosti stavů.

**4.1** S využitím předchozích zjištění rozhodněte, který z těchto dvou stavů je smíšený stav a který superponovaný. Své rozhodnutí odůvodněte.

**4.2** Vezměte neznámý stav, který jste označili jako superponovaný. Půjde tedy o stav ve tvaru  $a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ , kde  $a^2 + b^2 = 1$ . Určete hodnoty konstant  $a$  a  $b$ .

**4.3** Vezměte neznámý stav, který jste označili jako smíšený. Půjde tedy o stavy  $|\uparrow\rangle$  resp.  $|\downarrow\rangle$  kde  $c + d = 1$ . Určete hodnoty konstant  $c$  a  $d$ .

## Řešení úloh

### Úloha 1

**1.1** Pokud do experimentu posíláme částice ve vlastním stavu  $|\uparrow\rangle$ , naměříme na všech kladnou hodnotu průmětu spinu do osy  $z$ , tedy  $S_z = +\hbar/2$ . Pravděpodobnost naměření  $S_z = +\hbar/2$  je tedy 1 a pravděpodobnost naměření  $S_z = -\hbar/2$  je nulová.

Pokud orientujeme SGp do směru osy  $x$ , pak naměříme průměty  $+\hbar/2$  i  $-\hbar/2$ , oba s pravděpodobností 0,5. To je způsobeno tím, že z pohledu vlastních stavů operátoru  $\widehat{S}_x$  jsou vstupující částice v superponovaném stavu.

**1.2** Oproti úloze 1.1 naměříme na všech vyslaných částicích zápornou hodnotu průmětu spinu do osy  $z$ . Pravděpodobnost naměření  $S_z = +\hbar/2$  je tedy nulová a pravděpodobnost naměření  $S_z = -\hbar/2$  je 1.

Pokud orientujeme SGp do směru osy  $x$ , nedojde oproti předchozí úloze k žádné změně.

### Úloha 2

**2.1** Zvolením tohoto stavu bude průměrně 50 % vstupujících částic ve vlastním stavu  $|\uparrow\rangle$  a 50 % částic ve vlastním stavu  $|\downarrow\rangle$ . U konkrétně zvolené částice ovšem nemůžeme před měřením rozhodnout, v jakém z těchto vlastních stavů se nachází.

**2.2** Při orientaci SGp do směru osy  $z$  jsou částice vychýlené směrem vzhůru ve vlastním stavu  $|\uparrow\rangle$  a naměření  $S_z = +\hbar/2$  je u nich 100 % pravděpodobností. Částice vychýlené směrem dolů jsou ve vlastním stavu  $|\downarrow\rangle$  a naměření  $S_z = -\hbar/2$  je u nich 100 % pravděpodobností. Při orientaci SGp do směru osy  $x$  naměříme vlastní čísla  $+\hbar/2$  i  $-\hbar/2$  s pravděpodobností 0,5 pro každou individuální částici.

**2.3** Pokud posíláme dostatečné množství částic v zadaném smíšeném stavu do SGp s orientací ve směru osy  $z$ , dle zadání bude polovina z nich ve vlastním stavu  $|\uparrow\rangle$  a druhá polovina ve vlastním stavu  $|\downarrow\rangle$ .

Pro orientaci SGp ve směru osy  $x$  má každá individuální částice pravděpodobnost 0,5, že u ní naměříme kladnou i zápornou hodnotu průmětu spinu do osy  $x$ . Výsledky měření průmětu spinu do obou os, tj.  $z$  i  $x$ , jsou stejné, ale zdůvodnění je u každé osy jiné.

### Úloha 3

**3.1** Každá částice vstupující do SGp je v superponovaném stavu

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ , nachází se tedy „současně“ ve stavu  $|\uparrow\rangle$  i  $|\downarrow\rangle$ , zatímco ve smíšeném stavu byl „stav částice rozhodnut“ již před vysláním do SGp.

Při orientaci SGp do osy  $z$  jsou pravděpodobnost i naměření vlastních hodnot stejné. V tom se superponovaný stav od smíšeného neliší.

Při orientaci SGp do osy  $x$  jsou pravděpodobnost i naměření vlastních hodnot rozdílné. V superponovaném stavu naměříme pouze kladné hodnoty  $S_x = +\hbar/2$ , zatímco ve smíšeném stavu jsme mohli naměřit obě hodnoty.

**3.2** Použitím předpokladu

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \text{ a } |\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$$

můžeme přepsat superponovaný stav jako:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) = \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle + |+\rangle - |-\rangle) = |+\rangle$$

Vlastní stav  $|+\rangle$  odpovídá vlastní hodnotě  $+\hbar/2$ , proto je tato hodnota jedinou měřitelnou hodnotou.

**3.3** Tvrzení není správné. Pokud je systém v superponovaném stavu, tak se částice nacházejí ve všech stavech zároveň a teprve pomocí měření můžeme určit, zda se částice nachází ve stavu  $|\uparrow\rangle$  nebo  $|\downarrow\rangle$ .

Pokud by superponovaný stav znamenal, že částice „rychle přepíná“ mezi oběma vlastními stavy, pak by při měření  $S_x$  byla v jednom vlastním stavu  $S_z$  (jen nedokážeme říci, ve kterém) a měření by dopadlo stejně jako pro smíšený stav. Superponované stavy jsou ryze kvantovým fenoménem a nemají klasickou obdobu.

## Úloha 4

**4.1** Oba neznámé stavy mají při natočení SGp do osy  $z$  hodnoty pravděpodobnosti naměření vlastních hodnot 0,2 pro  $S_z = +\hbar/2$  a 0,8 pro  $S_z = -\hbar/2$ . Ovšem pro natočení SGp do osy  $x$  má první neznámý stav pravděpodobnost naměření 0,5 pro  $S_x = +\hbar/2$  i pro  $S_x = -\hbar/2$ , zatímco druhý neznámý stav má hodnoty pravděpodobností 0,9 pro  $S_x = +\hbar/2$  a 0,1 pro  $S_x = -\hbar/2$ .

Jelikož pro natočení SGp do osy  $x$  má první neznámý stav obě hodnoty pravděpodobností 0,5, můžeme použít stejnou myšlenku jako v úloze 3 a prohlásit první neznámý stav za smíšený.

Oproti tomu druhý neznámý stav nemá pro natočení SGp do osy  $x$  obě hodnoty pravděpodobností 0,5 a bude se tedy jednat o superponovaný stav.

**4.2** Při natočení SGp do osy  $z$  jsou hodnoty pravděpodobnosti naměření vlastních hodnot rovny druhým mocninám koeficientů  $a$  a  $b$ . Z měření tedy vidíme, že  $a = \sqrt{0,2}$  a  $b = \sqrt{0,8}$  (uvažujeme kladné reálné hodnoty).

Superponovaný stav má tedy tvar  $\sqrt{0,2} |\uparrow\rangle + \sqrt{0,8} |\downarrow\rangle$ . Náš výsledek můžeme ověřit vypočtením pravděpodobnosti naměření  $S_x = +\hbar/2$  jako

$$\begin{aligned} | \langle + | (\sqrt{0,2} |\uparrow\rangle + \sqrt{0,8} |\downarrow\rangle) |^2 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle + | + \langle - |) (\sqrt{0,2} |\uparrow\rangle + \sqrt{0,8} |\downarrow\rangle) \right|^2 = \\ \left| \sqrt{\frac{0,2}{2}} + \sqrt{\frac{0,8}{2}} \right|^2 &= 0,9, \end{aligned}$$

což se shoduje s výsledkem v apletu.

**4.3** Pro smíšený stav jsou hodnoty pravděpodobností 0,2 pro  $S_z = +\frac{\hbar}{2}$  a 0,8 pro  $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ , a tedy 20 % všech částic ve směsi je ve vlastním stavu  $|\uparrow\rangle$  a 80 % všech částic ve směsi je ve vlastním stavu  $|\downarrow\rangle$ . Z čehož dostaneme hodnoty koeficientů  $c = 0,2$  a  $d = 0,8$

Tento pracovní list vznikl v rámci bakalářské práce Martina Landy (KDF MFF UK, 2021). Úlohy byly částečně převzaty z pracovního listu [quvis](#). Podrobnější odkazy jsou k nalezení v bakalářské práci.