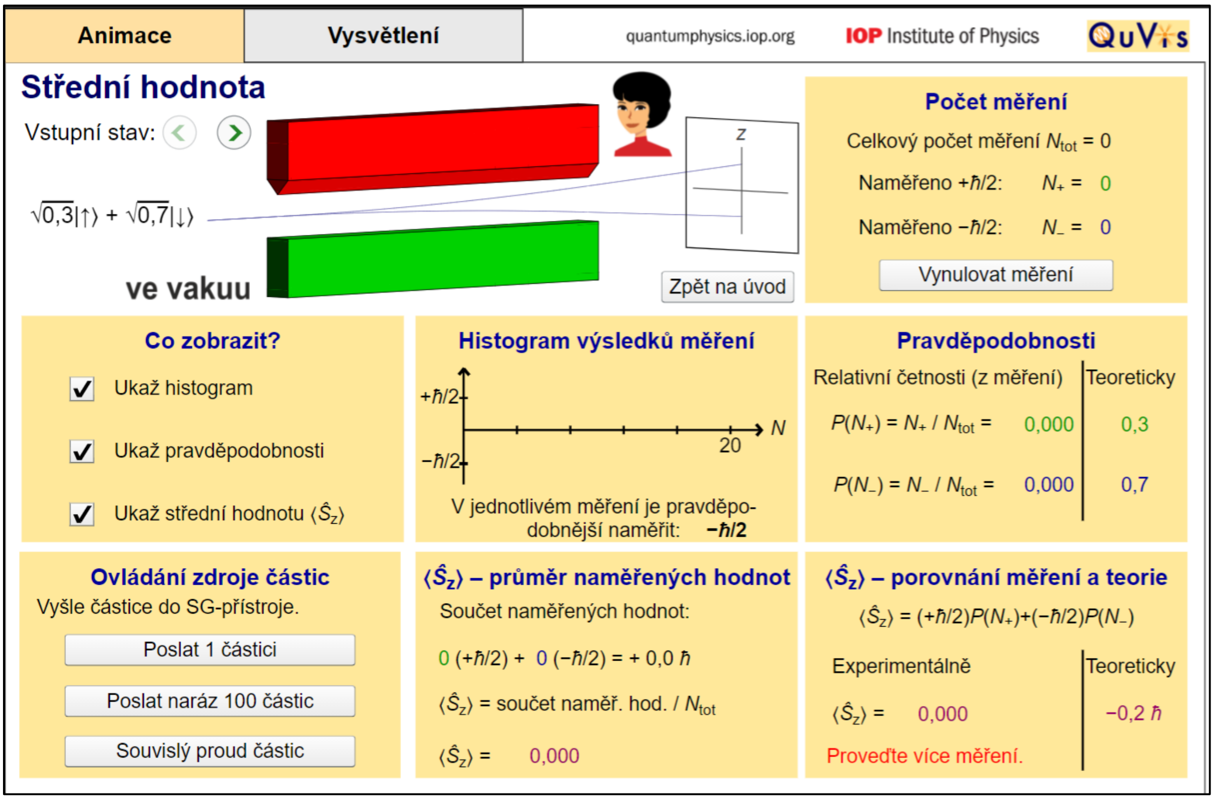
3 Střední hodnota

[Použitý aplet]

Funkce apletu: Aplet zobrazuje pravděpodobnosti naměření a střední hodnoty průmětu spinu částice se spinem ½ v závislosti na stavu částice, ve kterém vstupuje do Stern-Gerlachova přístroje (dále jen SGp).

Zaměření práce s apletem: Výpočet střední hodnoty průmětu spinu pro různé stavy, rozdíl mezi experimentální četností a teoreticky spočítanou pravděpodobností.

Ovládání apletu: Odkaz nás zavede na úvodní stránku apletu obsahující podrobnější popis funkcí apletu. Kliknutím na tlačítko *K animaci* se dostaneme k ovládání apletu. V oddílu *Co zobrazit* si můžeme zvolit, které informace chceme mít aktuálně zobrazené a které skryté. Oddíl *Ovládání zdroje částic* obsahuje tři tlačítka sloužící k vysílání částic do experimentu. Pokud si přejeme začít měření od začátku, použijeme tlačítko *Vynulovat měření* v oddílu *Počet měření.* Vstupní stav částic můžeme měnit kliknutím na šipky nacházející se na levé straně obrázku. Kliknutím na záložku *Vysvětlení* zobrazíme dodatečné informace a úlohy k práci s apletem.



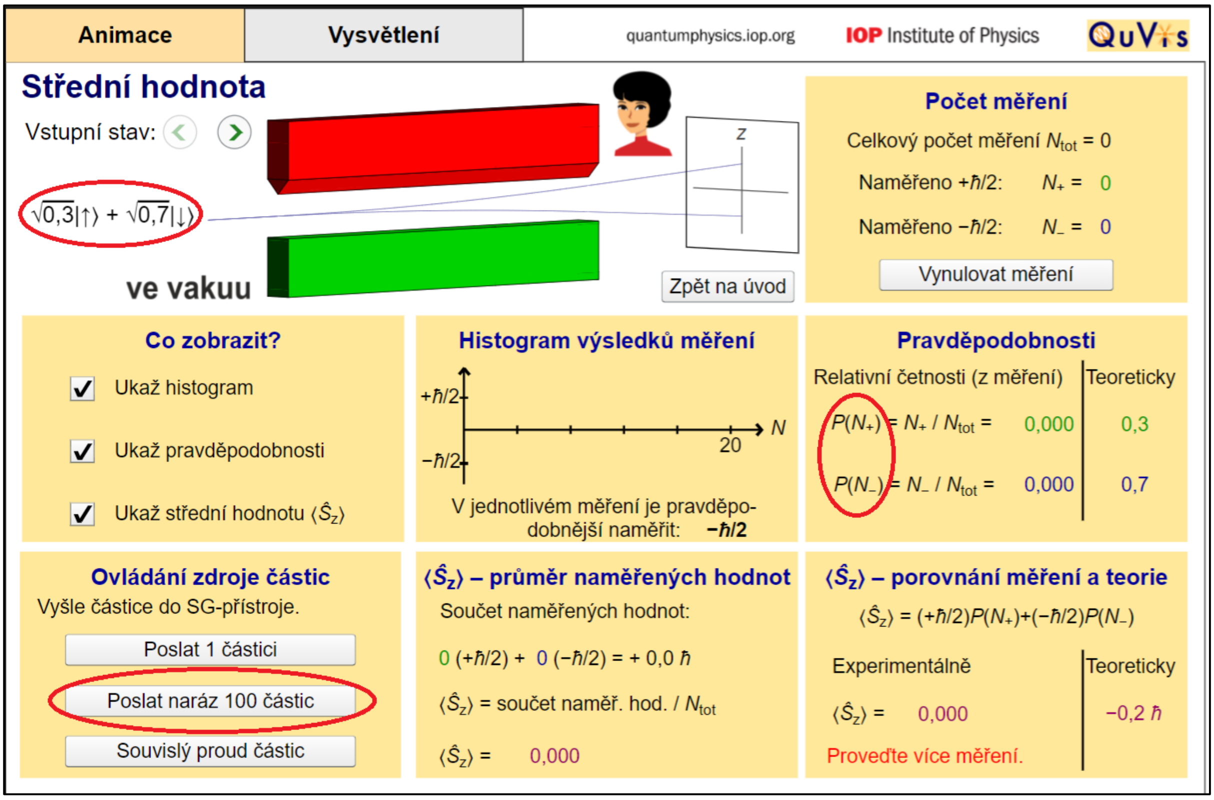
Obr. 1: Obrazovka apletu

Zadání úloh

Úloha 1 Nastavte si aplet tak, jak zobrazuje obr. 2. Vstupní stav částic tedy bude

$$\sqrt{0{,}3}|\uparrow> + \sqrt{0{,}7}|\downarrow>.$$

Vyšlete alespoň 500 částic a pozorujte pravděpodobnosti naměření jednotlivých vlastních čísel.



Obr. 2: Nastavení apletu pro úlohu 1

1.1 Jaké jsou možné měřitelné hodnoty? Pomocí apletu určete, s jakou pravděpodobností naměříme hodnoty $S_z = +\hbar/2$ a $S_z = -\hbar/2$. Jak můžeme tyto pravděpodobnosti spočítat přímo ze vstupního stavu?

1.2 Pomocí šipek zvolte druhý vstupní stav, tj. stav

$$1/\sqrt{5}(-2|\uparrow> + |\downarrow>)$$

a opět určete pravděpodobnosti naměření $S_z = +\hbar/2$ a $S_z = -\hbar/2$.

1.3 Pomocí šipek zvolte třetí vstupní stav a pokuste se měřením zjistit hodnoty koeficientů a a b.

Úloha 2 V oddílu *Co zobrazit* zvolte možnost *Ukaž střední hodnotu* $\langle \widehat{S_z} \rangle$.

2.1 Oba zobrazené oddíly zobrazují střední hodnotu. Pokuste se vlastními slovy popsat, v čem se liší.

2.2 Je možné, aby se střední hodnoty získané experimentálně měřením a střední hodnoty získané teoreticky vzájemně rovnaly?

2.3 Ukažte, že oba způsoby řešení musejí mít shodné výsledky.

2.4 Jak můžeme ze střední hodnoty poznat, která z měřitelných hodnot má větší pravděpodobnost výskytu? Ověřte pomocí různých vstupních stavů.

Úloha 3 Vymyslete vícero vstupních stavů, pro které bude platit:

3.1 Teoretická střední hodnota $\langle \widehat{S_z} \rangle$ je menší než nula.

3.2 Nejpravděpodobnějším výsledkem měření bude hodnota $+\hbar/2$.

3.3 Pravděpodobnost naměření hodnot $S_Z = +\hbar/2$ a $S_Z = -\hbar/2$ bude stejná.

Řešení úloh

Úloha 1

1.1 Jediné měřitelné hodnoty jsou $+\hbar/2$ a $-\hbar/2$.

Relativní četnosti naměření $S_Z = +\hbar/2$, resp. $S_Z = -\hbar/2$, můžeme spočítat jako $P_+ = N_+/N_{tot}$, resp. $P_- = N_-/N_{tot}$ (viz oddíly *Počet měření* a *Pravděpodobnosti).*

Pravděpodobnosti naměření jednotlivých hodnot také můžeme spočítat teoreticky jako druhou mocninu velikosti koeficientu daného vlastního stavu.

Tedy
pravděpodobnost naměření $S_Z = +\hbar/2$ je $\left|\sqrt{0{,}3}\right|^2 = 0{,}3$,
pravděpodobnost naměření $S_Z = -\hbar/2$ je $\left|\sqrt{0{,}7}\right|^2 = 0{,}7$.

Hodnoty pravděpodobností vypočítané teoreticky a četnosti zjištěné experimentálně se od sebe mohou lišit, lepší shodu můžeme získat navýšením vyslaného počtu částic.

1.2 Pravděpodobnosti naměření jednotlivých hodnot můžeme určit z předpisu stavu. Relativní četnosti určíme experimentálně. Dostáváme tedy:

pravděpodobnost naměření $S_Z = +\hbar/2$ je $\left|2/\sqrt{5}\right|^2 = \frac{4}{5} = 80\ \%$,
pravděpodobnost naměření $S_Z = -\hbar/2$ je $\left|1/\sqrt{5}\right|^2 = \frac{1}{5} = 20\ \%$.

1.3 Vysláním opravdu velkého množství částic, např. 5000, dostaneme pravděpodobnosti naměření $P_+ \sim 0{,}4$ a $P_- \sim 0{,}6$.
Tyto hodnoty jsou druhými mocninami velikosti hledaných koeficientů. Hodnoty koeficientů jsou tedy

$$a = \sqrt{0{,}4} \text{ a } b = \sqrt{0{,}6}$$

za předpokladu, že hledané koeficienty jsou reálná kladná čísla. Bez tohoto předpokladu by totiž mohly být řešením např. hodnoty $a = 0{,}5 + 0{,}3i$ či $a = -\sqrt{0{,}4}$.

Úloha 2

2.1 V oddílu *průměr naměřených hodnot* se počítá střední hodnota jako průměrná hodnota všech výsledků měření, tj.

$$\langle \widehat{S_z} \rangle \ = \ \left(\frac{\hbar}{2} N_+ + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) N_-\right) / N_{tot}.$$

V oddílu *Pravděpodobnosti* se nejprve určí pravděpodobnosti jako $P_+ = N_+/N_{tot}$, resp. $P_- = N_-/N_{tot}$, a můžeme je porovnávat s teoreticky určenými pravděpodobnostmi.
Střední hodnota je poté v oddílu *porovnání měření a teorie* spočítána jako vážený průměr možných hodnot, kde váhami jsou pravděpodobnosti, tedy

$$\langle \widehat{S_z} \rangle = \frac{\hbar}{2} P_+ + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) P_-.$$

2.2 Experimentálně a teoreticky získané střední hodnoty se k sobě budou blížit se zvyšujícím se počtem měření. Aby se obě hodnoty shodovaly, museli bychom se limitně blížit k nekonečnému počtu měření.

2.3 Postup výpočtu střední hodnoty naměřených hodnot

$$\langle \widehat{S_z} \rangle \ = \ \left(\frac{\hbar}{2} N_+ + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) N_-\right) / N_{tot}.$$

Pro velký počet měření můžeme použít vztah mezi pravděpodobnostmi a relativními četnostmi $P_+ = N_+/N_{tot}$, resp. $P_- = N_-/N_{tot}$. Dostaneme

$$\langle \widehat{S_z} \rangle \ = \frac{\hbar}{2} \frac{N_+}{N_{tot}} + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) \frac{N_-}{N_{tot}} = \frac{\hbar}{2} P_+ + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) P_-, \qquad (*)$$

což je výpočet střední hodnoty jako váženého průměru s váhami rovnými teoreticky určeným pravděpodobnostem. Oba postupy jsou tedy ekvivalentní.

2.4 Jediné měřitelné hodnoty jsou $+\hbar/2$ a $-\hbar/2$. Pokud je střední hodnota menší než nula, pak je pravděpodobnějším výsledkem měření $-\hbar/2$, pokud je střední hodnota větší než nula, pak je pravděpodobnějším výsledkem měření $+\hbar/2$(viz vztah (*)). Tedy např. ve vstupním stavu

$$\sqrt{0.3}|\uparrow> + \sqrt{0.7}|\downarrow>$$

střední hodnota $\langle\widehat{S_z}\rangle = -0{,}2\hbar$, takže hodnota $-\hbar/2$ má větší pravděpodobnost výskytu.

Úloha 3

3.1 Jakýkoliv stav, pro který platí $c_1|\uparrow> + \; c_2|\downarrow>$, kde $|c_1| < |c_2|$,

$$\text{například } \sqrt{\frac{4}{10}}|\uparrow> + \; \sqrt{\frac{6}{10}}|\downarrow> \text{ či } \sqrt{0{,}25}|\uparrow> + \; \sqrt{-0{,}75}|\downarrow>.$$

3.2 Jakýkoliv stav, pro který platí $c_1|\uparrow> + \; c_2|\downarrow>$, kde $|c_1| > |c_2|$,

$$\text{například } \sqrt{\frac{9}{10}}|\uparrow> + \sqrt{\frac{1}{10}}|\downarrow> \text{ či } \sqrt{\frac{1}{4}}(\sqrt{3}|\uparrow> + |\downarrow>).$$

3.3 Jakýkoliv stav, pro který platí $c_1|\uparrow> + \; c_2|\downarrow>$, kde $|c_1| = |c_2|$,

$$\text{například } \sqrt{\frac{1}{2}}|\uparrow> + \; \sqrt{\frac{1}{2}}|\downarrow>.$$

Tento pracovní list vznikl v rámci bakalářské práce Martina Landy (KDF MFF UK, 2021). Úlohy byly částečně převzaté z pracovního listu quvis. Podrobnější odkazy jsou k nalezení v bakalářské práci.