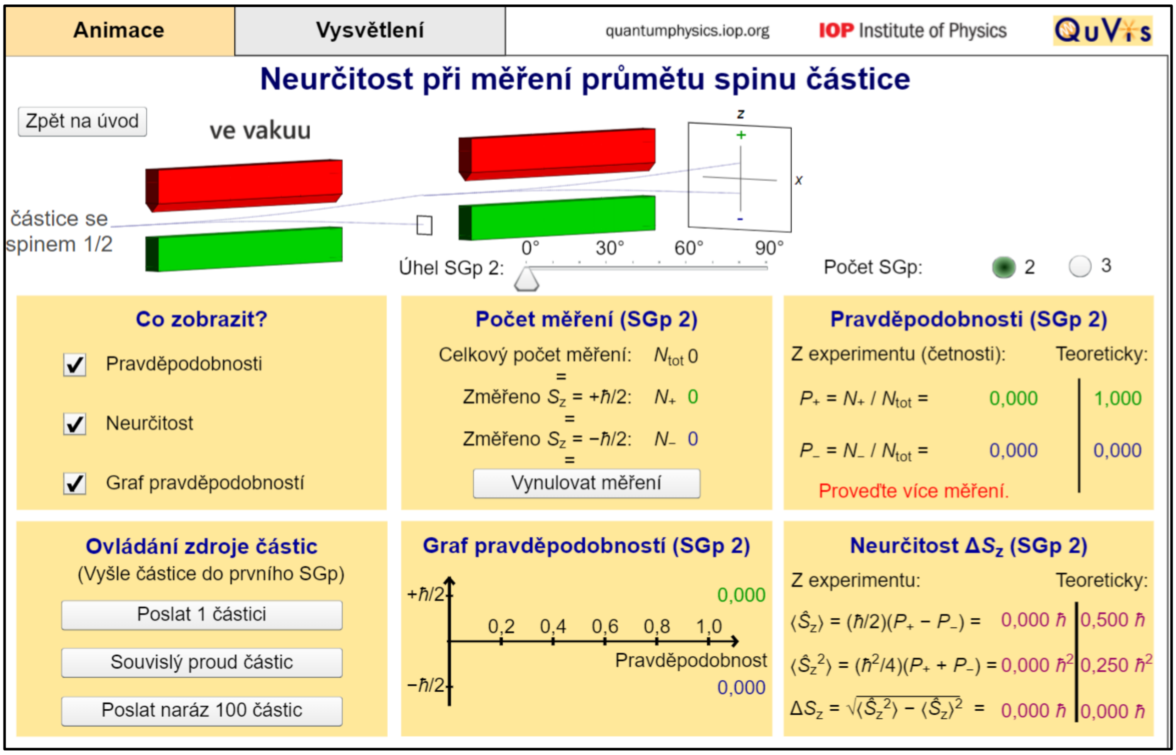
4 Neurčitost při měření spinu částice

[Použitý aplet]

Funkce apletu: Aplet zobrazuje pravděpodobnosti naměření jednotlivých hodnot spinu elektronu (nebo jiné částice se spinem ½) a neurčitost měření spinu pro konkrétní nastavení Stern-Gerlachových přístrojů (dále jen SGp). Bližší popis se nachází na titulní stránce apletu.

Zaměření práce s apletem: Neurčitost při měření průmětu spinu pro různé stavy při použití více SGp, vliv měření na naši znalost vlastností systému.

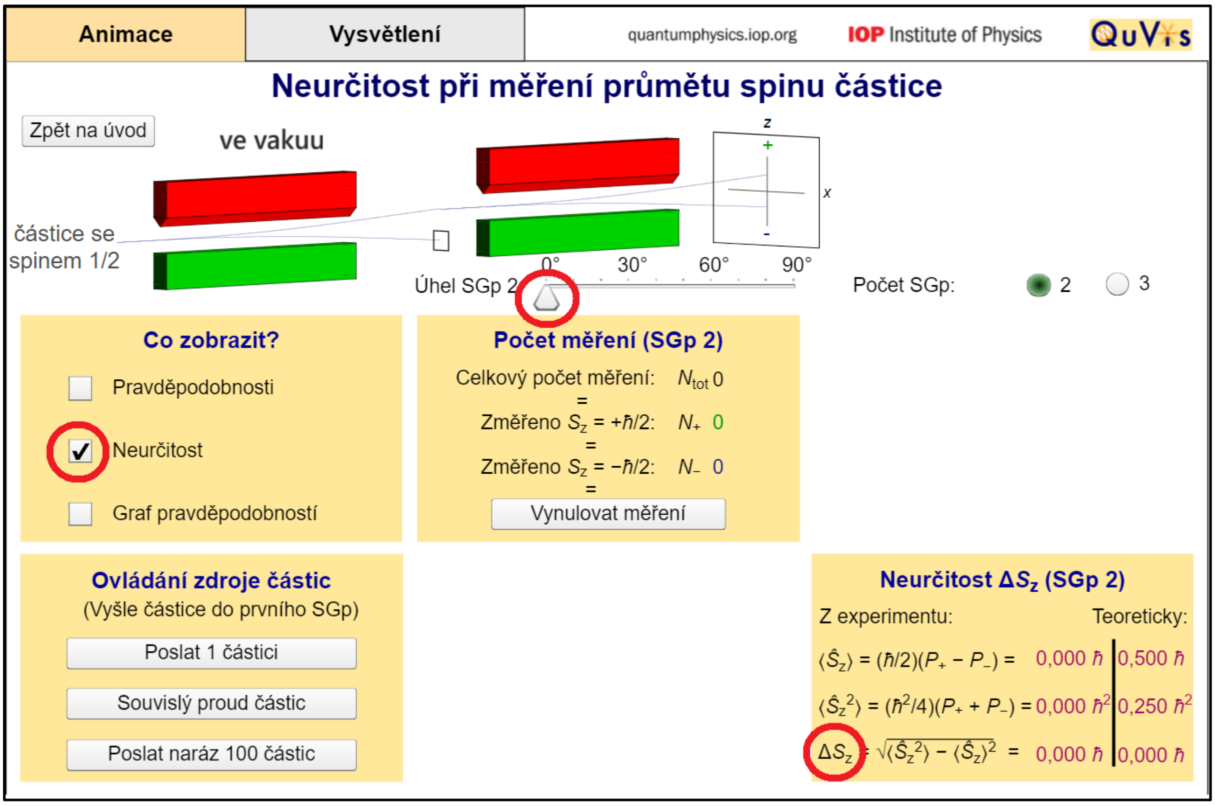
Popis a ovládání apletu: Aplet nás nejdříve zavede na úvodní stránku obsahující podrobnější popis funkcí apletu. Kliknutím na tlačítko *K animaci* se dostaneme k ovládání apletu. V oddílu *Co zobrazit* si můžeme zvolit, které informace chceme mít aktuálně zobrazené a které skryté. Oddíl *Ovládání zdroje částic* obsahuje tři tlačítka sloužící k vysílání částic do experimentu. Pokud si přejeme začít měření od začátku, použijeme tlačítko *Vynulovat měření* v oddílu *Počet měření (SGp 2).* Konkrétní nastavení SGp můžeme nastavit pomocí posuvníku *Úhel SGp 2* a *Počet SGp*. Kliknutím na záložku *Vysvětlení* zobrazíme dodatečné informace a úlohy k práci s apletem.



Obr. 1: Obrazovka apletu – nastaveno je zobrazení všech prvků a do měřících přístrojů nebyla poslána žádná částice, proto jsou všechny hodnoty nulové

Zadání úloh

Úloha 1 Nejprve se budeme zabývat neurčitostí měření spinu v závislosti na úhlu natočení SGp. Nastavte si měření se dvěma SGp, zapněte zobrazení neurčitosti. Nastavte si požadovaný úhel a opakovaným mačkáním tlačítek v oddílu *Ovládání zdroje částic* pošlete aparaturou alespoň 500 částic. Podívejte se na výsledek měření a sledujte neurčitost ΔS druhého SGp v pravém dolním rohu. Můžete si nejprve vyzkoušet několik různých úhlů a pak teprve pokračovat v řešení úkolů týkajících se tohoto nastavení.



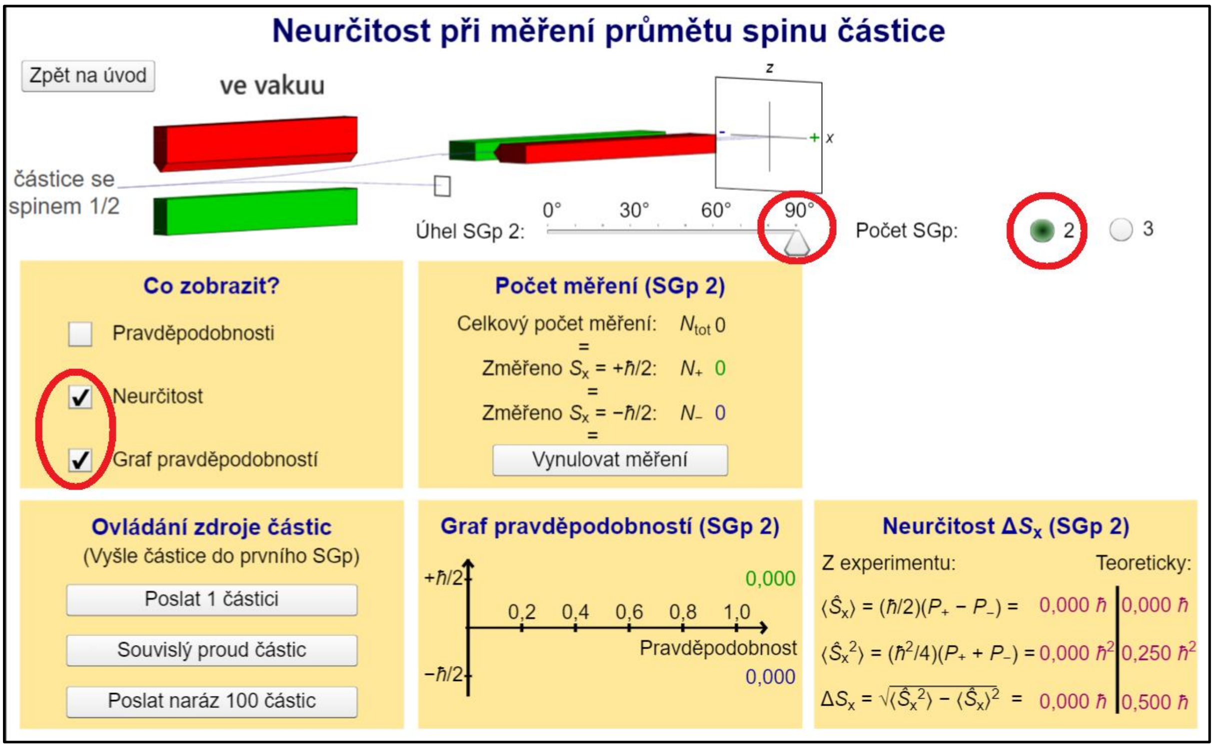
Obr. 2: Nastavení apletu pro úlohu 1

1.1 Uvědomte si, že bez ohledu na natočení SGp máme vždy právě dvě možné hodnoty průmětu spinu do dané osy, a to $+\hbar/2$ a $-\hbar/2$. V závislosti na stavu elektronu před vstupem do SGp se mohou lišit pravděpodobnosti naměření obou hodnot. Pro různá natočení druhého SGp pošlete aparaturou alespoň 500 částic a sledujte, kolikrát byla naměřena kladná a kolikrát záporná hodnota. Spočítejte příslušné pravděpodobnosti naměření a své výsledky porovnejte s výsledky apletu.

1.2 S využitím simulace určete, jaké natočení druhého SGp vede k nulové neurčitosti, tj. $\Delta S = 0$ a pro které natočení je hodnota ΔS maximální.

1.3 Pokuste se za pomoci situací z úlohy 1.2 vlastními slovy vysvětlit, co neurčitost je a jak souvisí s pravděpodobnostmi naměření možných průmětů spinu.

Úloha 2 Nastavte si aplet tak, jak zobrazuje obr. 2. Druhý SGp bude tedy orientován ve směru osy *x*. Nezapomeňte vynulovat předchozí měření a sledujte oddíly *Neurčitost* a *Graf pravděpodobnosti*.



Obr. 2: Nastavení apletu pro úlohu 2

2.1 Pojmenujte všechny členy vyskytující se ve vztahu na výpočet neurčitosti:

$$\Delta S_X = \sqrt{\langle \widehat{S_X^2} \rangle - \langle \widehat{S_X} \rangle^2} \tag{1}$$

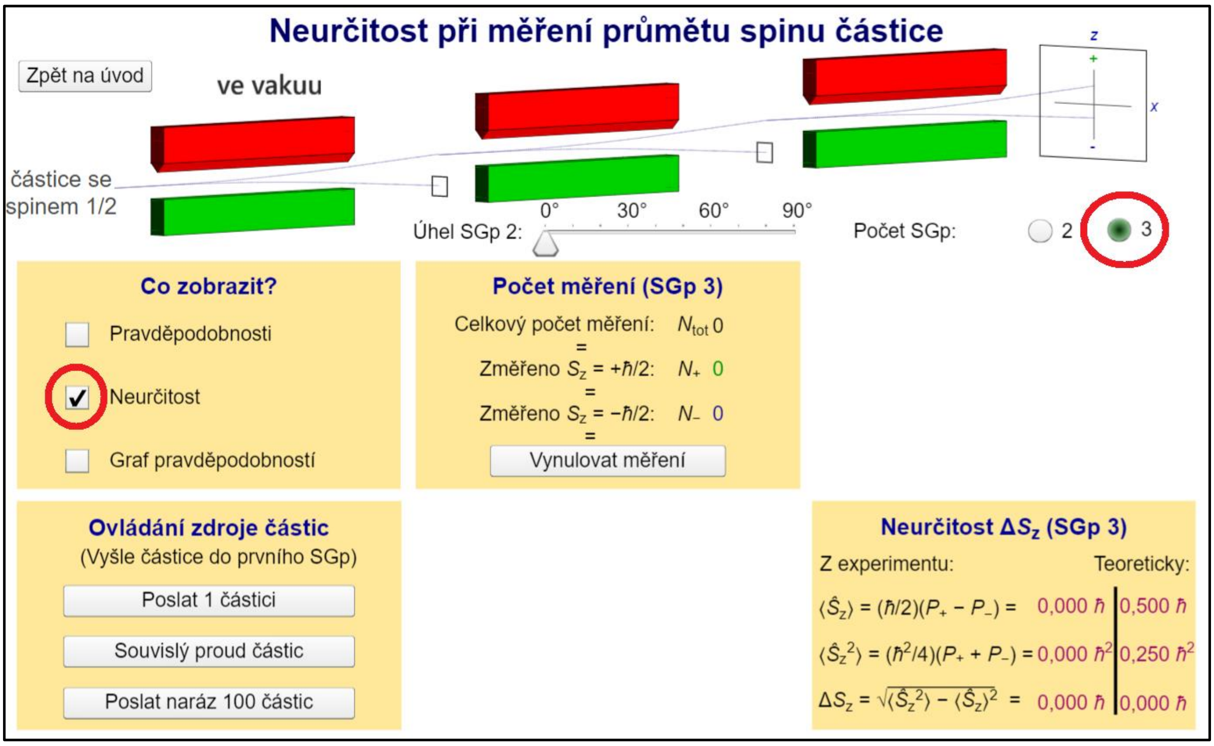
2.2 Zapněte souvislý proud částic do aparatury příslušným tlačítkem. Pokud by na vás byl moc rychlý, můžete do aparatury posílat částice po jedné příslušným tlačítkem. Sledujte, co zobrazuje oddíl *Graf pravděpodobností (SGp 2).* Popište to vlastními slovy. Jak souvisí s počtem měření, které jsou zobrazeny nad ním?

2.3 Předpokládejte velké množství naměřených hodnot a vypočítejte neurčitost ΔS_X pomocí vztahu (1) a výsledek porovnejte s výsledkem apletu. Jaké nastanou problémy, pokud bychom stejný výpočet prováděli s malým množstvím naměřených hodnot, například s deseti?

2.4 Zkontrolujte si jednotlivé mezivýsledky i celkový výsledek z úlohy 2.3 pomocí grafu pravděpodobnosti.

2.5 Popište, jak by se změnila hodnota neurčitosti a pravděpodobnosti naměření jednotlivých hodnot, pokud bychom rotovali s druhým SGp od 90° do 180°.

Úloha 3 Zvolme experiment se třemi SGp. Teď uvažujme neurčitost ΔS měření na třetím SGp.



Obr. 2: Nastavení apletu pro úlohu 3

3.1 Natáčením druhého SGp nalezněte polohu vedoucí k nulové hodnotě $\Delta S = 0$. Dále zjistěte, pro kterou polohu je hodnota ΔS maximální. V obou případech nastavení zdůvodněte.

3.2 Nastavte si orientaci druhého SGp do směru x a spusťte souvislý proud částic. Z pohledu klasické fyziky bychom na třetím SGp vůbec neměli naměřit průmět spinu $-\hbar/2$, protože by se částice s tímto průmětem spinu měly zastavit hned za prvním SGp. Pokuste se vlastními slovy vysvětlit, proč tomu tak není.

Řešení úloh

Úloha 1

1.1 Pokud jsou oba SGp natočeny ve směru osy z, pak jediným možným výsledkem pro druhý SGp je $+\hbar/2$. Výsledek je dopředu s jistotou znám a hodnota neurčitosti ΔS_Z je tedy nulová.
Pokud změníme orientaci druhého SGp o úhel $0° < \theta < 90°$, pak jsou přípustné oba výsledky $+\hbar/2$ a $-\hbar/2$, hodnota neurčitosti ΔS_θ je tedy nenulová. Protože je pravděpodobnost výskytu $+\hbar/2$ větší, než pravděpodobnost výskytu $-\hbar/2$, je hodnota neurčitosti ΔS_θ menší, než hodnota neurčitosti ΔS_X, což odpovídá natočení druhého SGp ve směru osy x, při kterém je pravděpodobnost výskytu obou hodnot stejná. Pravděpodobnosti naměření můžeme také jednoduše odhadnout pomocí četností měření jako $P_+ = N_+/N_{tot}$ a $P_- = N_-/N_{tot}$. Aplet nám ukáže, že už pro 500 částic dostáváme četnosti velmi blízké teoreticky spočítaným pravděpodobnostem.

1.2 Simulaci nastavíme jako experiment se dvěma SGp, zobrazíme hodnoty neurčitosti zaškrtnutím příslušné kolonky, natoření druhého SGp měníme posuvníkem. Pokud jsou oba SGp nasměrovány ve směru osy z (posuvník nastaven na hodnotu 0°), pak naměřená hodnota průmětu spinu je vždy $+\hbar/2$ a neurčitost je tedy nulová. Pokud je první SGp nasměrován dle osy z ale druhý SGp je otočen o úhel $\theta = 90°$, pak je hodnota neurčitosti maximální. To je způsobeno tím, že obě možné hodnoty průmětu spinu mají stejnou pravděpodobnost, výsledek měření je tedy „nejvíce neznámý“. Panel *Neurčitost ΔS_X (SGp 2)* nám ukazuje, že teoretická hodnota ΔS_X je rovna $\hbar/2$. Se zvyšujícím se počtem částic se hodnota neurčitosti, určená z měřených hodnot, blíží této teoretické hodnotě.

1.3 Neurčitost měření vyjadřuje, jak se výsledek jednoho měření průměrně odlišuje od střední hodnoty získané měřením dané veličiny na mnoha částicích ve stejném stavu. Pokud s jistotou dopředu víme, jaký bude výsledek ještě předtím, než částice projde druhým SGp, pak je neurčitost nulová. Pokud je ovšem možný více než jeden výsledek, pak je neurčitost nenulová a my tedy nemůžeme s jistotou předpokládat žádný výsledek. Čím je tedy menší neurčitost, tím lépe známe dopředu výsledek měření a naopak.

Úloha 2

2.1 ΔS_X je neurčitost veličiny S_X, která určuje, jak dobře známe dopředu výsledek měření. $\langle\widehat{S_X^2}\rangle$ je střední hodnota kvadrátu veličiny S_X a $\langle\widehat{S_X}\rangle^2$ je kvadrát střední hodnoty veličiny S_X. Střední hodnota je hodnota, která se rovná průměru velkého množství naměřených hodnot.

2.2 Na grafu vidíme, že jediné měřitelné výsledky jsou $S_X = \hbar/2$ a $S_X = -\hbar/2$. Graf na základě vyslaných částic ukazuje pravděpodobnosti průmětů obou hodnot spinu. Při daném nastavení oba z těchto výsledku mají teoretickou pravděpodobnost výskytu 0.50. Se zvyšujícím se počtem částic, se výsledky grafu postupně blíží této teoretické hodnotě.

2.3

$\langle\widehat{S_X}\rangle = (\hbar/2)P_+ + (-\hbar/2)P_- = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{2} - \frac{\hbar}{2}\frac{1}{2} = 0$ a tedy i $\langle\widehat{S_X}\rangle^2 = 0$

$\langle\widehat{S_X^2}\rangle = (\hbar/2)^2 P_+ + (-\hbar/2)^2\, P_- = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{2} + \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{2} = \frac{\hbar^2}{4}$

Tyto hodnoty nyní dosadíme do vztahu (1) : $\Delta S_X = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} - 0} = \frac{\hbar}{2}$

2.4 Z grafu vidíme, že při velkém počtu částic se oba výsledky vyskytují se stejnou pravděpodobností, což je v souladu s naším výsledkem, že střední hodnota průmětu spinu je rovna $\langle\widehat{S_X}\rangle = 0$.

Dále vidíme, že vzdálenost obou výsledků od střední hodnoty je $\frac{\hbar}{2}$, což souhlasí s naším výsledkem, že neurčitost je rovna $\Delta S_X = \frac{\hbar}{2}$.

2.5 Díky rotaci druhého SGp o úhel větší než 90° začne být výsledek $-\hbar/2$ častější, než $+\hbar/2$, pravděpodobnost naměření $-\hbar/2$ tedy roste a pravděpodobnost naměření $+\hbar/2$ klesá. Hodnota neurčitosti bude také klesat a při plné rotaci o 180° bude opět nulová.

Úloha 3

3.1 Pokud jsou všechny tři SGp orientovány podle osy z, pak je hodnota průmětu spinu $+\hbar/2$. Hodnota neurčitosti je tedy nulová. Pokud je druhý SGp orientován podle osy x, hodnota neurčitosti je maximální. Do třetího SGp totiž pouštíme sice jen částice s vlastním stavem druhého SGp, což je kladný průmět $|+>$, to je superpozice ovšem superpozice $|\uparrow>$ a $|\downarrow>$. Panel Neurčitost ΔS_z (SGp 3) nám ukazuje, že teoretická hodnota ΔS_z je rovna $\hbar/2$. Se zvyšujícím se počtem částic se hodnota neurčitosti blíží této teoretické hodnotě.

3.2 I přesto, že jsme částice se záporným průmětem spinu do osy z odfiltrovali prvním SGp a do dalších SGp pouštíme jen ty, které mají kladný průmět, měření druhým SGp průmětu spinu do směru x nám tuto „informaci smazalo“. Jsou tedy opět možné oba stavy $+\hbar/2$ a $-\hbar/2$, a neurčitost je tedy, ač se to z pohledu klasické fyziky zdá nemožné, nenulová.

Tento pracovní list vznikl v rámci bakalářské práce Martina Landy (KDF MFF UK, 2021). Úlohy byly částečně převzaté z pracovního listu quvis. Podrobnější odkazy jsou k nalezení v bakalářské práci.