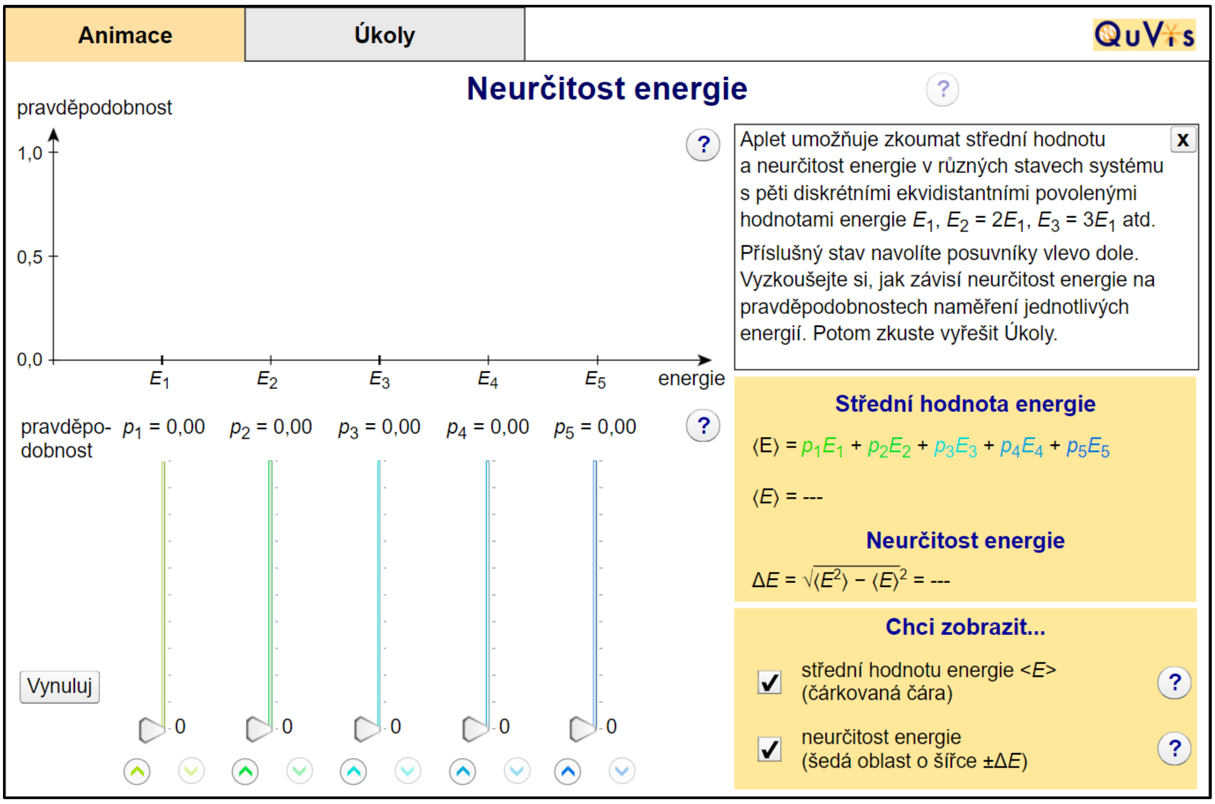
5 Neurčitost energie

[Použitý aplet]

Funkce apletu: Aplet provádí výpočty neurčitosti střední hodnoty energie v různých stavech, jak vlastních stavech, tak ve stavech daných superpozicí vlastních stavů.

Zaměření práce s apletem: Střední hodnota a neurčitost energie ve stacionárních a nestacionárních stavech, jejich vlastnosti.

Popis a ovládání apletu: Aplet je rozdělen do dvou částí, *Animace* a *Úkoly.*
Odkaz na aplet nás zavede na úvodní stránku části *Animace*, na které se v horní části nachází histogram zobrazující pravděpodobnosti, s jakými bychom naměřili jednotlivé možné energie ve stavu, který nastavíme pomocí posuvníků ve spodní části obrazovky. V pravé dolní části okna apletu je ovládací panel, kterým můžeme nastavit, co chceme zobrazit. Bližší vysvětlení jednotlivých prvků se zobrazí po kliknutí na symboly otazníků.
Do druhé části apletu se dostaneme pomocí tlačítka *Úkoly* v horní liště*.* V této části je nám položeno pět otázek, které můžeme použitím stupnice vyřešit a své řešení si hned zkontrolovat.



Obr. 1: Úvodní stránka apletu

Zadání úloh

Úloha 1 Seznamte se s ovládáním a fungováním animace.

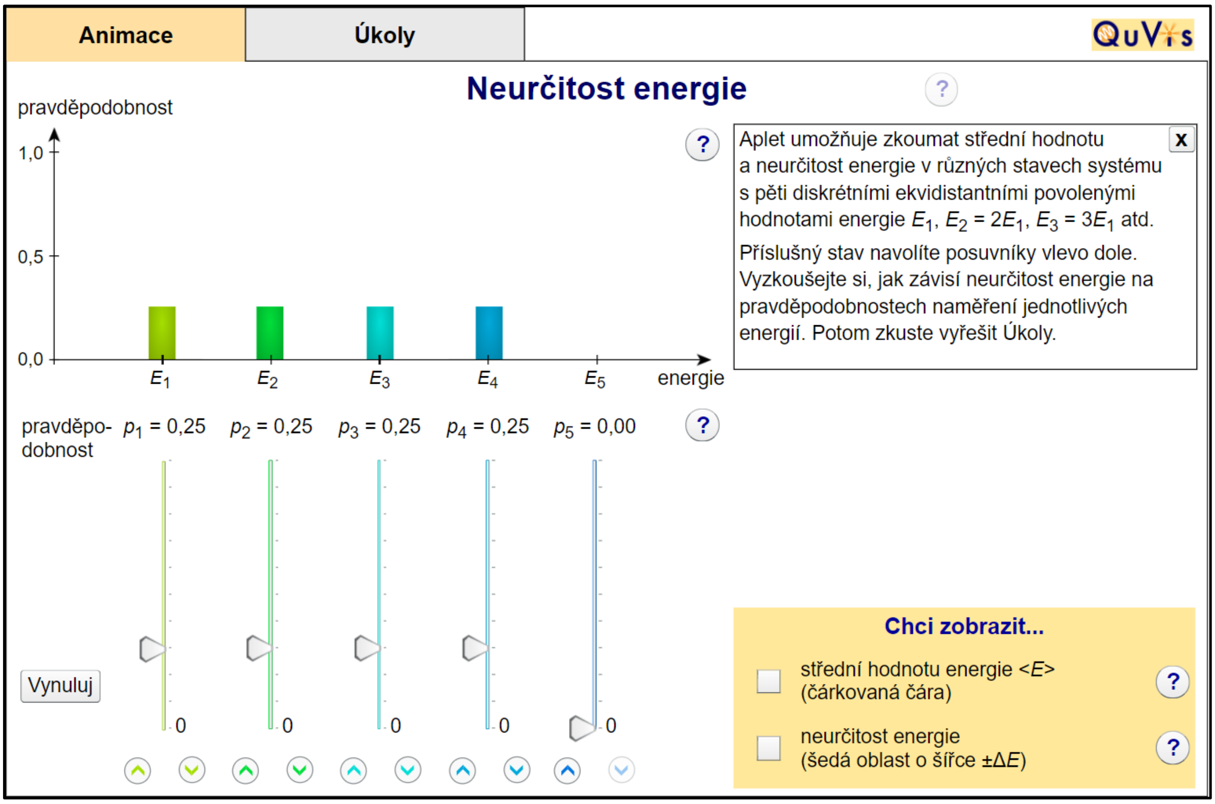
1.1 Kolik různých hodnot energií můžeme naměřit? Je mezi jejich hodnotami nějaký konkrétní vztah? Co z tohoto vztahu plyne pro jejich vzájemnou polohu v grafu?

1.2 Jak určíme pravděpodobnost p_i naměření konkrétní hodnoty energie E_i z grafů, které nám aplet zobrazuje? Jaký vztah platí pro pravděpodobnosti všech naměřitelných energií?

1.3 Pro jaké stavy je hodnota neurčitosti energie nulová a kdy je nenulová? Může být hodnota neurčitosti záporná? Svou odpověď zdůvodněte.

Úloha 2 Vypněte si zobrazení střední hodnoty a neurčitost. Nastavte stav (viz Obr. 2) pomocí stupnice tak, aby:

$p_1 = 0{,}25$ $\quad p_2 = 0{,}25$ $\quad p_3 = 0{,}25$ $\quad p_4 = 0{,}25$ $\quad p_5 = 0{,}00$



Obr. 2: Nastavení apletu pro úlohu 2

2.1 Vyjádřete v násobcích E_1 střední hodnotu energie $\langle E \rangle$ v uvedeném stavu.

2.2 Bude hodnota neurčitosti energie ΔE v tomto stavu kladná, záporná či nulová? Pokuste se vysvětlit.

2.3 Vypočítejte hodnotu neurčitosti energie ΔE. Výsledky zkontrolujte pomocí ovládacího panelu.

2.4 Vypočítejte hodnotu neurčitosti energie ΔE pro další stavy a výsledky si zkontrolujte pomocí apletu:
2.4.1 $p_1 = 0{,}00$ $p_2 = 0{,}25$ $p_3 = 0{,}00$ $p_4 = 0{,}75$ $p_5 = 0{,}00$
2.4.2 $p_1 = 0{,}25$ $p_2 = 0{,}50$ $p_3 = 0{,}25$ $p_4 = 0{,}00$ $p_5 = 0{,}00$
2.4.3 $p_1 = 0{,}00$ $p_2 = 1{,}00$ $p_3 = 0{,}00$ $p_4 = 0{,}00$ $p_5 = 0{,}00$
2.4.4 $p_1 = 0{,}25$ $p_2 = 0{,}00$ $p_3 = 0{,}50$ $p_4 = 0{,}00$ $p_5 = 0{,}25$

Úloha 3 Přepněte aplet do části *Úkoly* a vyřešte zadané problémy (zde je uvedeno jejich znění).

3.1 Vytvořte superponovaný stav, ve kterém se střední hodnota energie $\langle E \rangle$ nerovná žádnému možnému výsledku měření energie v tomto stavu.

3.2 Vytvořte superponovaný stav, ve kterém se střední hodnota energie $\langle E \rangle$ rovná jednomu z možných výsledků měření energie v tomto stavu.

3.3 Vytvořte stav, ve kterém je neurčitost energie nulová.

3.4 Vytvořte stav, který má největší možnou neurčitost energie.

3.5 Vypočítejte neurčitost energie v zobrazeném stavu.

Úloha 4 Přepněte aplet opět do části Animace a zvolte si dvě libovolné energie a posuvníky měňte jejich hodnoty pravděpodobnosti. Ostatním energiím ponechte nulovou pravděpodobnost.

4.1 Použitím posuvníků zjistěte, kdy je neurčitost energie největší. Ověřte i pro jiné kombinace dvojic energií.

4.2 Pokuste se předchozí zjištění dokázat matematicky obecně.

Nápověda: Uvažujte energie E_a a E_b, kde $E_a < E_b$ a pravděpodobnosti jejich naměření p_a a p_b. Najděte výraz pro neurčitost energie $\Delta E(p_a)$, kde p_a je argument funkce ΔE. Nalezněte maximum této funkce a určete, pro kterou hodnotu p_a je hodnota ΔE největší.

Řešení úloh

Úloha 1

1.1 Můžeme naměřit 5 různých hodnot energie. Mezi nimi je vztah $E_2 = 2E_1$, $E_3 = 3E_1$, $E_4 = 4E_1$ a $E_5 = 5E_1$, energie jsou tedy celočíselné násobky nejnižší energie, tj. jsou ekvidistantní.

1.2 Poloha posuvníků určuje poměry mezi pravděpodobnostmi naměření jednotlivých energií. Z tohoto poměru můžeme určit pravděpodobnost naměření konkrétní hodnoty energie jako $p_i = \frac{a_i}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}$, kde a_i jsou hodnoty členů poměru.

1.3 $\Delta E > 0$ pokud máme stav, ve kterém můžeme naměřit více než jednu hodnotu energie. $\Delta E = 0$, pouze pokud máme stav s právě jednou energií. $\Delta E < 0$ není možná v žádném případě, jelikož z definice víme, že $\Delta E = \sqrt{< E^2 > - < E >^2} \geq 0$ musí platit vždy.

Úloha 2

2.1 $\langle E \rangle = p_1E_1 + p_2E_2 + p_3E_3 + p_4E_4 = 0{,}25E_1 + 0{,}25\ (2E_1) + 0{,}25\ (3E_1) + 0{,}25\ (4E_1) = (0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}75 + 1)E_1 = 2{,}5E_1$

2.2 $\Delta E > 0$ ve stavech, ve kterých můžeme naměřit více než jednu energii. $\Delta E = 0$ pouze ve stavech, ve kterých můžeme naměřit právě jednu energii (tzv. Stavech s ostrou hodnotou). $\Delta E < 0$ není možná v žádném stavu.

2.3 $\langle E^2 \rangle = p_1E_1^2 + p_2E_2^2 + p_3E_3^2 + p_4E_4^2 = 0{,}25\ E_1^2 + 0{,}25\ (2E_1)^2 + 0{,}25\ (3E_1)^2 + 0{,}25\ (4E_1)^2 = (0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4)E_1^2 = 7{,}5E_1^2$

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle \hat{E} \rangle^2} = \sqrt{7{,}5E_1^2 - 6{,}25} = \sqrt{1{,}25}\ E_1 \approx 1{,}12E_1$$

Tyto hodnoty souhlasí s hodnotami vypočtenými simulací.

2.4.1

$$\langle E\rangle = p_2E_2 + p_4E_4 = 0{,}25\ (2E_1) + 0{,}75\ (4E_1) = (0{,}5+3)E_1 = 3,5E_1$$

$$\langle E^2\rangle = p_2E_2^2 + p_4E_4^2 = 0{,}25\ (2E_1)^2 + 0{,}75\ (4E_1)^2 = (1+12)E_1^2 = 13E_1^2$$

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2\rangle\ - \langle\hat{E}\rangle^2} = \sqrt{13E_1^2 - 12{,}25E_1^2} = \sqrt{0{,}75}\,E_1 \approx 0{,}87E_1$$

2.4.2

$$\begin{aligned}\langle E\rangle = p_1E_1 + p_2E_2 + p_3E_3 &= 0{,}25E_1 + 0{,}50\ (2E_1) + 0{,}25\ (3E_1)\\ &= (0{,}25+1+0{,}75)E_1 = 2E_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle E^2\rangle = p_1E_1^2 + p_2E_2^2 + p_3E_3^2 &= 0{,}25\ E_1^2 + 0{,}50\ (2E_1)^2 + 0{,}25\ (3E_1)^2\\ &= (0{,}25+2+2{,}25)E_1^2 = 4{,}5E_1^2\end{aligned}$$

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2\rangle\ - \langle\hat{E}\rangle^2} = \sqrt{4{,}5E_1^2 - 4E_1^2} = \sqrt{0{,}5}\,E_1 \approx 0{,}71E_1$$

2.4.3

$$\langle E\rangle = p_2E_2 = 1{,}00\ (2E_1) = 2E_1$$

$$\langle E^2\rangle = p_2E_2^2 = 1{,}00\ (2E_1)^2 = 4E_1^2$$

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2\rangle\ - \langle\hat{E}\rangle^2} = \sqrt{4E_1^2 - 4E_1^2} = 0$$

2.4.4

$$\begin{aligned}\langle E\rangle = p_1E_1 + p_3E_3 + p_5E_5 &= 0{,}25E_1 + 0{,}50\ (3E_1) + 0{,}25\ (5E_1)\\ &= (0{,}25+1{,}5+1{,}25)E_1 = 3E_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle E^2\rangle = p_1E_1^2 + p_3E_3^2 + p_5E_5^2 &= 0{,}25\ E_1^2 + 0{,}50\ (3E_1)^2 + 0{,}25\ (5E_1)^2\\ &= (0{,}25+4{,}5+6{,}25)E_1^2 = 11E_1^2\end{aligned}$$

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2\rangle\ - \langle\hat{E}\rangle^2} = \sqrt{11E_1^2 - 9E_1^2} = \sqrt{2}\,E_1 \approx 1{,}41E_1$$

Úloha 3

3.1 Superponovaný stav nastavíme tak, že pravděpodobnost více než jedné energie nastavíme na nenulovou hodnotu. Střední hodnota energie zároveň nesmí být násobkem základní energie E_1, jinak by šlo o jeden z možných výsledků měření. Jedním z možných řešení je například:

$p_1 = 0{,}50$ $p_2 = 0{,}50$ $p_3 = 0{,}00$ $p_4 = 0{,}00$ $p_5 = 0{,}00$

3.2 Superponovaný stav opět nastavíme tak, že pravděpodobnost více než jedné energie nastavíme na nenulovou hodnotu. Střední hodnota energie nyní ovšem musí být ve tvaru $kE_1, k \in \{1,2,3,4,5\}$. Možná řešení jsou například:

$p_1 = 0{,}20$ $p_2 = 0{,}20$ $p_3 = 0{,}20$ $p_4 = 0{,}20$ $p_5 = 0{,}20$
$p_1 = 0{,}33$ $p_2 = 0{,}00$ $p_3 = 0{,}33$ $p_4 = 0{,}00$ $p_5 = 0{,}33$

3.3 Potřebujeme pravděpodobnost naměření jedné konkrétní hodnoty energie 100 %. Máme tedy vytvořit stav, u kterého dopředu víme, jakou hodnotu energie naměříme. Toho dosáhneme nastavením stupnice pouze s jednou nenulovou energií. Jedním z možných řešení je například:

$p_1 = 0{,}00$ $p_2 = 0{,}00$ $p_3 = 1{,}00$ $p_4 = 0{,}00$ $p_5 = 0{,}00$

3.4 Neurčitost energie roste s rozdílem hladin energií v superpozici. Zároveň také roste, pokud jsou výsledky naměření obou energií stejně pravděpodobné. Maximální neurčitosti tedy dosáhneme zvolením superpozice obsahující pouze krajní hodnoty energie E_1 a E_5, obě s pravděpodobností $p_1 = 0{,}50$ a $p_5 = 0{,}50$.

3.5 K výpočtu neurčitosti potřebujeme vypočítat střední hodnotu kvadrátu energie a kvadrát střední hodnoty energie. Podrobný postup je uveden v řešení úlohy 2.2.

Úloha 4

4.1 Neurčitost energie je největší, pokud se $p_1 = p_2 = 1/2$, to platí pro libovolnou dvojici.

4.2

$\langle\hat{E}\rangle = p_a E_a + p_b E_b$

$\langle\hat{E}^2\rangle = p_a E_a^2 + p_b E_b^2$

$\Delta E^2 = \langle\hat{E}^2\rangle - \langle\hat{E}\rangle^2$

$\Delta E^2 = p_a E_a^2 + p_b E_b^2 - (p_a E_a + p_b E_b)^2$

$= p_a E_a^2 + p_b E_b^2 - p_a^2 E_a^2 - p_b^2 E_b^2 - 2 p_a p_b E_a E_b$

$\Delta E^2 = E_a^2 p_a (1 - p_a) + E_b^2 p_b (1 - p_b) - 2 p_a (p_b) E_a E_b$

Použitím vztahu $p_b = 1 - p_a$ dostáváme:

$\Delta E^2 = E_a^2 p_a (1 - p_a) + E_b^2 (1 - p_a) p_a - 2 p_a (1 - p_a) E_a E_b$

$\Delta E^2 = p_a (1 - p_a)(E_a^2 + E_b^2 - 2 E_a E_b)$

$\Delta E = p_a (1 - p_a)(E_a - E_b)^2$

což je hledaná funkce s argumentem p_a.

Jelikož z definice $\Delta E \geq 0$ platí vždy, maximum ΔE i ΔE^2 nastane pro stejnou hodnotu p_a. Můžeme tedy hledat maximum funkce ΔE^2 a derivací nalézt její maximum jako:

$$\frac{d}{dp_a}\left((E_a - E_b)^2 \, (p_a - p_a^2)\right) = 0$$

$$1 - 2p_a = 0,$$

z čehož dostáváme hodnotu $p_a = \frac{1}{2}$. A tedy pro pravděpodobnosti $p_a = p_b = 1/2$ dostaneme maximální hodnotu neurčitosti energie.

Tento pracovní list vznikl v rámci bakalářské práce Martina Landy (KDF MFF UK, 2021). Úlohy byly částečně převzaté z pracovního listu quvis. Podrobnější odkazy jsou k nalezení v bakalářské práci.