

# Lineární harmonický oscilátor

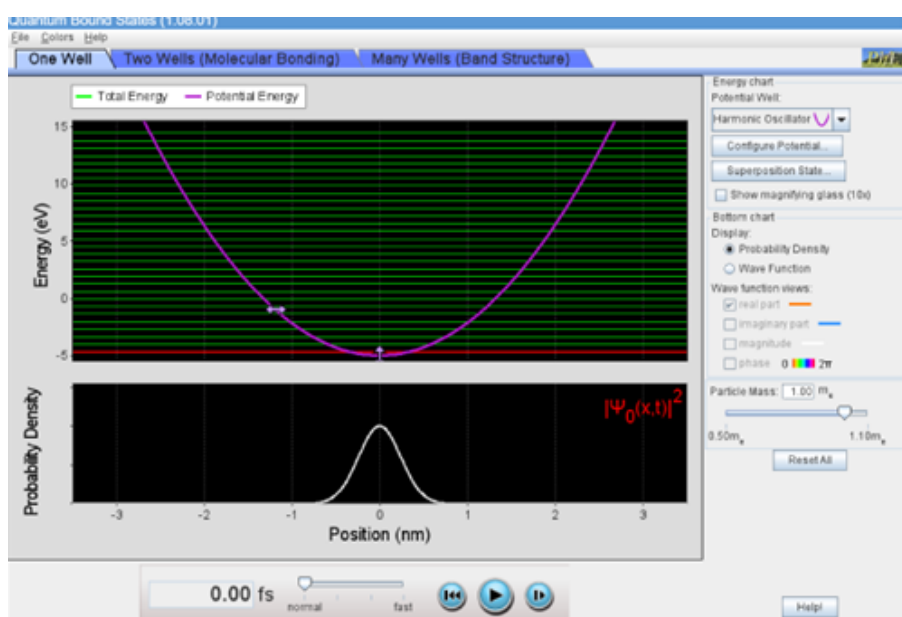
## Zadání úloh

V následujícím pracovním listu se budete zabývat lineárním harmonickým oscilátorem (LHO). Připomeňte si, jaký tvar mají stacionární stavy a jakou podobu mají energetické hladiny lineárního harmonického oscilátoru.

Rozklikněte následující odkaz, který vás zavede na aplet zobrazující řešení jednoduchých jednodimenzionálních problémů kvantové mechaniky:

<https://phet.colorado.edu/sims/cheerj/bound-states/latest/bound-states.html?simulation=bound-states>.

Vpravo nahoře klikněte na „Potential Well“ a vyberte možnost „Harmonic Oscillator“. Zobrazí se vám lineární harmonický oscilátor. Zde je ukázka správně nastaveného apletu:



Obrázek 1: Správně nastavený PhET aplet.

Nahoře v hlavní části okna apletu vidíte průběh potenciální energie a energetické hladiny, pod tímto grafem je graf hustoty pravděpodobnosti. V pravé části okna apletu můžete zvolit hustotu pravděpodobnosti nebo vlnovou funkci, podle toho, jaký graf chcete pozorovat ve spodní části hlavního okna. Když kliknete na konkrétní energetickou hladinu, zobrazí se graf odpovídající stavu s vámi vybranou energií. Dole je možnost spustit vývoj grafu v čase.

1. Vpravo dole lze nastavit různou hmotnost uvažované částice. Popište, jak se se změnou hmotnosti částice mění průběh potenciální energie. Vysvětlete, proč tomu tak je.
2. Vpravo nahoře lze měnit další parametry. Zvolte možnost „Configure Potential“ a získáte možnost měnit dvě fyzikální veličiny. O jaké veličiny jde? V jakých jednotkách jsou uvedeny? Zkuste změnit jejich hodnoty a pozorujte průběh potenciálu. Svoje pozorování popište.

3. Nastavte vpravo zobrazení grafu vlnové funkce. Pozorujte časový vývoj grafu vlnové funkce. Nyní zvolte stav odpovídající jiné hodnotě energie a opět pozorujte časový vývoj vlnové funkce. Porovnejte časový vývoj několika stavů s odlišnou energií. Připomeňte si nebo vyhledejte časový člen stacionární vlnové funkce plynoucí ze Schrödingerovy rovnice. Porovnejte svoje pozorování s teorií.
4. Pomocí možnosti „Configure Potential“ nastavte konstantu  $\omega$  na hodnotu  $2 \text{ fs}^{-1}$ . Vyzkoušejte dvě hodnoty minima potenciální energie (v apletu označené jako „Offset“):
  - $V_0 = -4,3 \text{ eV}$ ,
  - $V_0 = 1,1 \text{ eV}$ .

Pokud zadáváte hodnoty pomocí klávesnice, použijte desetinnou tečku, nikoliv čárku.

V obou případech porovnejte časový vývoj grafu vlnové funkce příslušející základnímu a druhému excitovanému stavu. Co jste zjistili?

5. Zobrazte několik grafů hustoty pravděpodobnosti příslušejících navzájem různým stacionárním stavům. U jednoho vybraného stavu pozorujte, zda mají lokální maxima hustoty pravděpodobnosti všechna stejnou hodnotu. Jak souvisí počet lokálních maxim s hodnotou kvantového čísla, které je danému stavu přiřazeno?
6. Pro tento úkol doporučuji nastavit spíše „užší“ potenciální energii. Klikněte na několik energetických hladin a poznamenejte si kvantové číslo a hodnotu energie. Spočítejte rozdíly mezi sousedními hladinami, do výpočtu zahrňte prvních pět hladin. K jaké myšlence vás vedou zjištěné rozdíly energií?

## Řešení úloh z pracovního listu „Lineární harmonický oscilátor“

1. Připomeňme, že z klasické fyziky známe vztah popisující závislost potenciální energie na souřadnici pro lineární harmonický oscilátor. Tento vztah je obvykle vyjadřován vzorcem:  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ , kde  $\omega$  značí konstantu ovlivňující šířku grafu potenciální energie, v klasické fyzice tato veličina vyjadřuje úhlovou frekvenci kmitání oscilátoru. Písmeno  $m$  značí hmotnost částice.

Z tohoto vztahu je vidět, že čím větší bude hmotnost částice, tím bude graf potenciální energie užší.

2. Vpravo nahoře lze pomocí možnosti „Configure Potential“ měnit hodnotu konstanty  $\omega$  (ta je uvedena ve femtosekundách na minus prvou) a také minimum potenciální energie (v apletu označeno jako „Offset“). Když zvětšíme hodnotu  $\omega$ , tak bude graf potenciální energie užší. Se změnou minima potenciální energie se graf posouvá nahoru nebo dolů. Energie je uváděna v elektronvoltech, což je pro popis chování částice vhodnější jednotka než například joule. Pro připomenutí ještě uvedme převodní vztah mezi oběma jednotkami:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

3. Zde porovnáváme dva stavy s různou hodnotou energie. Časový vývoj vlnové funkce stacionárního stavu je dán časovým členem  $e^{\frac{E_n t}{\hbar}}$ . Čím větší je absolutní hodnota energie částice, tím větší bude frekvence „kmitání“ příslušné vlnové funkce. V apletu pozorujeme, že vlnové funkce příslušející energetickým hladinám více vzdáleným od nulové hladiny energie opravdu kmitají s vyšší frekvencí.

4. Když nastavíme minimum potenciální energie na hodnotu  $-4,3 \text{ eV}$ , pozorujeme, že graf vlnové funkce základního stavu se mění rychleji než graf vlnové funkce příslušející druhému excitovanému stavu. Druhý excitovaný stav je v tomto případě stavem s energií méně vzdálenou od nulové hladiny.

Když je minimum potenciální energie na hodnotě  $1,1 \text{ eV}$ , tak energie základního stavu je méně vzdálená od nulové hladiny než energie druhého excitovaného stavu. Rychleji se tedy bude měnit graf vlnové funkce druhého excitovaného stavu.

5. Po zobrazení několika funkcí je patrné, že lokální maxima dané funkce nemají všechna stejnou hodnotu, jako tomu je u nekonečné pravoúhlé jámy. Pro stav s kvantovým číslem  $n$  platí, že má jeho hustota pravděpodobnosti  $n + 1$  lokálních maxim. Zároveň v apletu pozorujeme, že maxima, která jsou více vzdálena od středu oscilátoru, mají větší hodnotu než ta, která jsou v jeho středu.

6. Zde je konkrétní příklad potenciální energie: nastavil jsem konstantu  $\omega$  na hodnotu  $\omega = 2,0 \text{ fs}^{-1}$  a minimum potenciální energie na hodnotu  $V_0 = -5 \text{ eV}$ . Poznamenal jsem si kvantová čísla a příslušné energie:

- $n = 0$ :  $E_0 = -4,34 \text{ eV}$ ,
- $n = 1$ :  $E_1 = -3,03 \text{ eV} \rightarrow E_1 - E_0 = 1,31 \text{ eV}$ ,
- $n = 2$ :  $E_2 = -1,71 \text{ eV} \rightarrow E_2 - E_1 = 1,32 \text{ eV}$ ,
- $n = 3$ :  $E_3 = -0,39 \text{ eV} \rightarrow E_3 - E_2 = 1,32 \text{ eV}$ ,
- $n = 4$ :  $E_4 = 0,92 \text{ eV} \rightarrow E_4 - E_3 = 1,31 \text{ eV}$ .

Mnou vypočítané konkrétní energetické rozdíly naznačují, že energetické spektrum LHO je ekvidistantní. Rozdíly energií nevychází všechny stejně, což je způsobeno zaokrouhlením. O tom, že energetické spektrum LHO je ekvidistantní, se můžeme přesvědčit jednoduchým výpočtem, kde určíme rozdíl mezi sousedními energetickými hladinami  $E_{n+1}$  a  $E_n$ :

$$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega\left[\left(n+1\right) + \frac{1}{2}\right] - \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega - \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega.$$

Odtud je vidět, že rozdíl dvou sousedních hladin je stále stejný, nezávislý na volbě dvou sousedních hladin. Je nicméně závislý na hodnotě konstanty  $\omega$ .

Můžeme ověřit správnost určeného rozdílu sousedních dvou hladin rychlým dosazením do odvozeného vzorce:

$$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega \doteq 2,12 \text{ J} \doteq 1,32 \text{ eV}.$$

Dosazuji přibližnou hodnotu redukované Planckovy konstanty:  
 $\hbar \doteq 1,06 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .