# Dvoudimenzionální lineární harmonický oscilátor

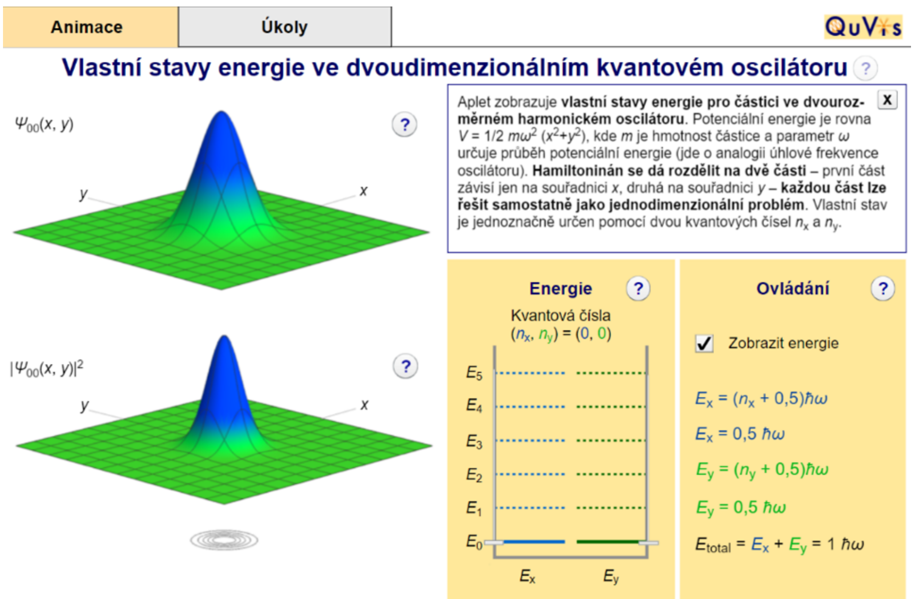
## Zadání úloh

V následujícím pracovním listu se budete zabývat dvoudimenzionálním lineárním harmonickým oscilátorem (2D LHO). Připomeňte si, jak se pomocí jednodimenzionálních problémů poskládá řešení 2D problémů se separovatelnými proměnnými. Rovněž si připomeňte, jak se určí energie $n$-té hladiny a jaký tvar mají stacionární vlnové funkce 2D LHO.

Využijte odkaz, který vás zavede na QuVis aplet zobrazující dvourozměrný lineární harmonický oscilátor:

http://fyzweb.cz/materialy/kvantovka/2DQuantumHarmonicOscillator/2d_oscillator2.html

Na obrázku níže je aplet, se kterým budete pracovat:




Obrázek 1: Správně nastavený QuVis aplet.

Vlevo na stránce je vidět graf vlnové funkce a pod ním graf hustoty pravděpodobnosti. Uprostřed lze nastavit hodnotu obou kvantových čísel odpovídajících řešení příslušných jednodimenzionálních problémů, vpravo si můžete nechat zobrazit energii částice.

1. Nastavujte různé kombinace kvantových čísel a pozorujte grafy vlnových funkcí příslušejících stavům popsaných danými kvantovými čísly. Zkuste odvodit, jaká je souvislost mezi hodnotou kvantových čísel a počtem extrémů vlnové funkce. (Vzpomeňte, jak tomu bylo v případě jednorozměrného lineárního harmonického oscilátoru).

2. Jaká kombinace kvantových čísel $n_x$ a $n_y$ zaručí, že výsledná vlnová funkce bude mít:

   - šest lokálních extrémů?
   - právě jedno (globální) maximum?

   Nejdříve si odpověď rozmyslete a poté svůj odhad ověřte nastavením příslušné kombinace kvantových čísel.

3. Nastavte stav popsaný kvantovými čísly $n_x = 5$ a $n_y = 5$. Kde nalezneme částici nacházející se v tomto stavu s největší pravděpodobností? Nemusíte uvádět konkrétní souřadnice, stačí, pokud slovně popíšete, o jaká místa jde.

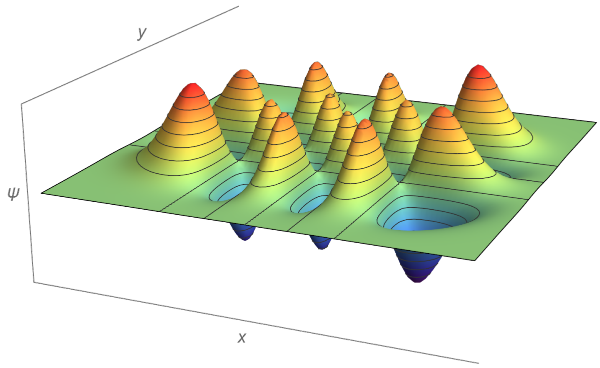
   Nápověda: Využijte graf hustoty pravděpodobnosti.

4. Nyní skryjte hodnoty energie. Jaká bude celková energie částice ve stavu, ve kterém budou mít kvantová čísla hodnoty:

   - $n_x = n_y = 3$?
   - $n_x = 1$, $n_y = 2$?

   Svoje výsledky si následně zkontrolujte v apletu.

5. Mějme tento graf:




Obrázek 2: Zadání úlohy 5.

   - Jde o graf vlnové funkce, nebo hustoty pravděpodobnosti? Vysvětlete.
   - Jaká je celková energie částice nacházející se v tomto stacionárním stavu?

## Řešení úloh z pracovního listu „Dvoudimenzionální lineární harmonický oscilátor“

1. U jednorozměrného oscilátoru pro graf vlnové funkce platí, že počet lokálních extrémů je o jedna větší než kvantové číslo, kterým daný stav popisujeme.

   Zde je situace analogická, jen nesmíme zapomenout na to, že máme nyní kvantová čísla dvě a počty lokálních extrémů podél jednotlivých os je třeba mezi sebou násobit. Takže když obě kvantová čísla zvětšíme o jedna a následně výsledky vynásobíme, dostaneme počet lokálních extrémů. Pokud označíme počet lokálních extrémů písmenem $N$, pak platí:

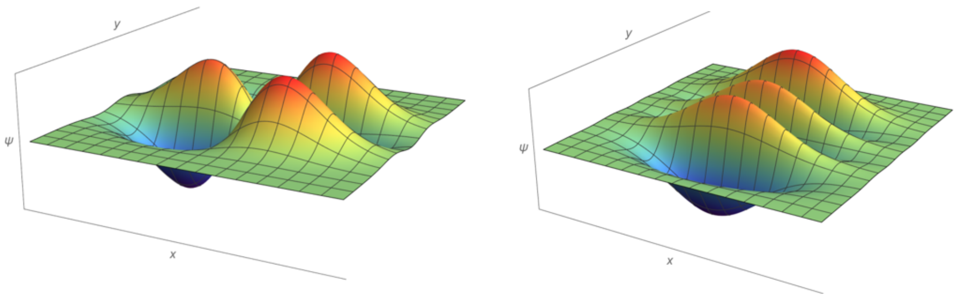
$$N = (n_x + 1)\cdot(n_y + 1).$$

2. - Šest lokálních extrémů vlnové funkce zařídí více kombinací kvantových čísel. Vyjdeme z řešení předchozí úlohy. V 1D případě by platilo, že stavu popsaném kvantovým číslem $n$ odpovídá vlnová funkce s $n+1$ extrémy. Zde hledáme dvě čísla, jejichž součin je šest. Poté tato čísla o jedna zmenšíme a dostaneme kvantová čísla:

     první řešení: $n_x = 0$, $n_y = 5$,

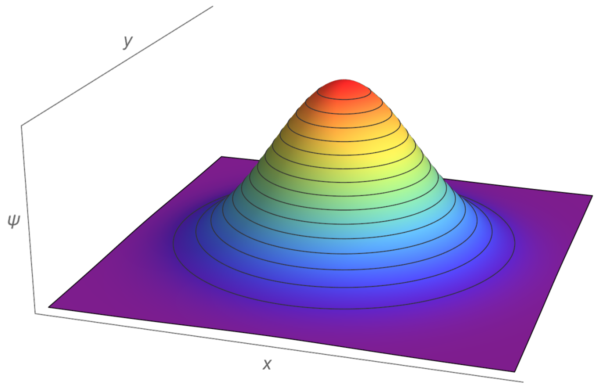
     druhé řešení: $n_x = 1$, $n_y = 2$.

     V každém z uvedených řešení je možné kvantová čísla navzájem prohodit, tím se výsledný počet extrémů vlnové funkce nezmění. Celkově má tedy tato úloha čtyři různá řešení. Na obrázku 3 jsou uvedena dvě z nich.



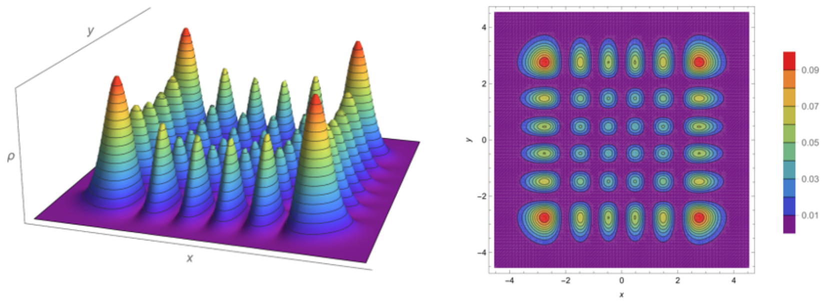

Obrázek 3: Graf vlnové funkce odpovídající stavu s kvantovými čísly $n_x = 1$, $n_y = 2$ (vlevo) a stavu s $n_x = 0$, $n_y = 5$ (vpravo).

   - Aby měla vlnová funkce jedno globální maximum, tak v jednorozměrném případě by kvantové číslo muselo být nulové, částice by se musela nacházet v základním stavu. Zde máme dvě kvantová čísla, obě musí být nulová, $n_x = n_y = 0$ (viz obrázek 4).




Obrázek 4: Graf vlnové funkce odpovídající stavu s kvantovými čísly $n_x = n_y = 0$.

3. Na základě předchozí úlohy víme, že ve stavu popsaném kvantovými čísly $n_x = n_y = 5$ má vlnová funkce 36 lokálních extrémů. Odpovídající hustota pravděpodobnosti má tedy 36 lokálních maxim. Nicméně tato maxima nemají všechna stejnou hodnotu. Hodnoty maxim hustoty pravděpodobnosti se zvětšují s rostoucí vzdáleností od středu potenciálu. Největší hodnotu mají maxima, která jsou nejvíce vzdálena od středu grafu. Pokud bychom si představili, že spojnice maxim rovnoběžné se souřadnicovými osami tvoří čtverec, potom by pravděpodobnost nalezení částice byla největší ve vrcholech tohoto čtverce (viz obrázek 5). Níže je uveden jak klasický, tak i vrstevnicový graf.




Obrázek 5: Hustota pravděpodobnosti odpovídající stavu s kvantovými čísly $n_x = 5$, $n_y = 5$, klasický i vrstevnicový graf.

4. Připomeňme, že celková energie částice nacházející se v lineárním harmonickém oscilátoru se vypočítá podle vzorce $E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Problém oscilátoru je separabilní, pokud tedy uvažujeme dvoudimenzionální oscilátor, bude celková energie částice rovna součtu dílčích energií $E_{n_x}$ a $E_{n_y}$.

   Pro celkovou energii částice dostáváme vzorec $E = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$.

   - $n_x = n_y = 3 \to E = \hbar\omega(3 + 3 + 1) = 7\hbar\omega$.
   - $n_x = 1$, $n_y = 2 \to E = \hbar\omega(2 + 1 + 1) = 4\hbar\omega$.

   Naše výsledky se shodují s tím, co ukazuje aplet. Pokud jste již řešili úlohy na téma „Dvoudimenzionální nekonečná potenciálová jáma“, porovnejte mezi sebou řešení této úlohy.

5.

- Jde o graf vlnové funkce, neboť je vidět, že funkce na obrázku 2 nabývá kromě kladných hodnot i hodnot záporných.
- Z obrázku určíme kvantová čísla podle počtu extrémů. Myslíme na to, že počet extrémů podél dané osy je o jedna větší než příslušné kvantové číslo: $n_x = 5$, $n_y = 3$. Využijeme výsledky z předchozí úlohy a dopočítáme celkovou energii: $E = \hbar\omega(5 + 3 + 1) = 9\hbar\omega$.